Le calcul des combinaisons

R. Geyl

REOSC, 10 rue des Ecoles, F-91160 Ballainvillier, France

L'époque de la réalisation empirique des optiques des "caméra obscura" dont les améliorations étaient le fruit de l'intuition de quelque artisan polisseur perspicace est aujourd'hui bien révolue.

En effet, la définition, l'optimisation et le tolérancement d'une formule optique constitue un travail d'ingénierie majeur dont le but est d'assurer que les lentilles et miroirs qui seront lancés en fabrication seront à même de remplir leur fonction.

L'apparition et le développement des calculateurs électroniques a été un élément déterminant dans l'évolution du calcul des combinaisons optiques car celui-ci est un grand consommateur de calculs numériques. D'autre part, il est rapidement apparu que la puissance des calculateurs électroniques nécessitait de revoir les schémas de calcul. Des expressions des dérivées partielles des aberrations ont alors été établies et des algorithmes d'optimisation quasi-automatique sont apparus.

Il serait cependant absurde de s'en remettre entièrement à l'ordinateur pour l'établissement d'une formule optique. En effet, les outils purement numériques sont complétés par des outils analytiques qui permettent d'explorer certaines familles de combinaisons, de comprendre et prédire des impossibilités, de trouver des équivalences, bref de tout ce qui fait la différence entre l'ordinateur "stupide" et l'ingénieur concepteur. C'est pourquoi nous étudierons dans un premier temps :

le calcul paraxial

les perturbations paraxiales

la théorie des aberrations chromatiques et de l'apochromatisme

la théorie des aberrations du troisième ordre

Les formules établies pourront alors être utilisées pour traiter quelques cas pratiques courants tels que :

la lame à faces planes et parallèles

la lentille simple

le doublet

les miroirs et télescopes

Nous passerons ensuite à l'aspect "méthodes numériques" avec :

une introduction aux méthodes d'optimisation

une introduction au tolérancement

la présentation d'un programme d'optimisation du commerce

CHAPITRE 1

LE CALCUL PARAXIAL

1.0 INTRODUCTION

La détermination des caractéristiques paraxiales constitue la première étape de l'analyse ou de la synthèse d'un système optique. Le but de ce chapitre n'est pas d'exposer les différentes notions d'imagerie paraxiales de grandeur et position d'image, de distance focale, de plans principaux, etc.. car nous supposerons le lecteur familiarisé avec celles-ci. Nous présenterons par contre un formalisme de calcul paraxial universel s'adaptant aisément au traitement sur ordinateur tout en introduisant des quantités qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

1.1 FIGURE CANONIQUE

Limitons notre étude aux systèmes optiques admettant un axe de symétrie de révolution en nous plaçant dans le plan méridien. L'approximation paraxiale, dite approximation de GAUSS ou approximation linéaire, consiste à considérer que tout rayon traversant le système peut s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de deux rayons fondamentaux (voir figure 1.1).

Un **rayon d'ouverture** issu du point objet A sur l'axe et s'appuyant sur le bord de la pupille. Au niveau du dioptré ce rayon est caractérisé par sa hauteur d'incidence h et l'angle u qu'il fait avec l'axe.

Un **rayon de champ** issu du point B en dehors de l'axe et passant par le centre de la pupille. Il est caractérisé au niveau du dioptré par les quantités k et v .

Au point de vue du calcul paraxial les quantités h , u , k , v sont des infiniments petits du premier ordre.

Pour déterminer les éléments paraxiaux du système étudié nous allons suivre la marche de ces deux rayons fondamentaux. Dans la pratique, pour fixer les conditions initiales, on peut distinguer deux cas en fonction de la distance de l'objet.

1.1.1 OBJET A DISTANCE FINIE

On choisit comme dioptre de départ le plan de l'objet et les éléments initiaux sont alors :

Rayon d'ouverture
 $h = 0$
 $u = 1/2$ angle d'ouverture

Rayon de champ
 $k = y$
 $v = y/(x-p)$

1.1.2 OBJET A L'INFINI

On choisit comme dioptre de départ le plan de la pupille d'entrée du système et les éléments initiaux sont alors :

Rayon d'ouverture
 $h = \eta$ = rayon de la pupille
 $u = 0$

Rayon de champ
 $k = 0$
 $v = 1/2$ angle de champ

1.2 MARCHÉ D'UN RAYON PARAXIAL

1.2.1 NOTATIONS ET CONVENTIONS DE SIGNE

Avant d'établir toute formule précisons les conventions que nous allons utiliser. Chaque dioptre du système est caractérisé par diverses quantités :

son rang r dans le système
 sa courbure $C=1/R$ positive si le centre de courbure est à droite du sommet
 l'indice n du milieu qui le précède ou n' du milieu qui le suit
 la distance e (e') qui le sépare du dioptre précédent (suivant)

Les distances sont comptées positivement de la gauche vers la droite qui est le sens nominal de propagation de la lumière.

Les angles sont comptés positivement pour une rotation en sens inverse des aiguilles d'une montre.

Les formules resteront valables dans le cas des miroirs si les indices et épaisseurs qui suivent une réflexion d'ordre impair sont négatifs.

1.2.2 REFRACTION A TRAVERS UN DIOPTRE

La réfraction à travers un dioptre d'un rayon défini par les quantités h et u se décompose en :

$$\begin{aligned} i &= u + hC \\ \text{puis } n'i' &= ni \\ \text{et } u' &= i' - hC \end{aligned}$$

D'où par élimination :

$$n'u' = nu - (n' - n)hC$$

i est l'angle d'incidence du rayon d'ouverture sur le dioptré.

Pour le rayon de champ on a la relation $n'v' = nv - (n' - n)kc$ en introduisant l'angle d'incidence j .

1.2.3 TRANSFERT AU DIOPTRE SUIVANT

Connaissant les quantités h, u (ou k, v) au niveau du dioptré de rang r , la détermination de ces quantités au niveau du dioptré de rang $r+1$ est effectuée à l'aide des relations :

$$h_{r+1} = h_r + e'_r u'_r$$

$$u_{r+1} = u'_r$$

$$k_{r+1} = k_r + e'_r v'_r$$

$$v_{r+1} = v'_r$$

1.2.4 TABLEAU PARAXIAL

La première étape de l'analyse d'un système optique consiste alors à dresser un **tableau paraxial** contenant pour chaque dioptré du système étudié les quantités h, u, k, v caractérisant les deux rayons paraxiaux d'ouverture et de champ ainsi que les quantités (n_i) et (n_j) qui nous seront utiles pour la détermination des aberrations chromatiques et du 3^{ème} ordre.

Un exemple de listing des caractéristiques d'un objectif de GAUSS et de son tableau paraxial est présenté sur la figure 1.2.4

1.3 EXPLOITATION DU TABLEAU PARAXIAL

1.3.1 POSITION DE L'OBJET ET DE LA PUPILLE

Connaissant les quantités h et u' au niveau d'un dioptré du système on peut calculer la distance de l'image à ce dioptré par la relation $x' = -h/u'$.

De même pour la pupille, on a $p' = -k/v'$.

1.3.2 INVARIANT DE LAGRANGE

Il est aisé de montrer que la quantité $l = n(hv - ku)$ se conserve au cours de la réfraction à travers un dioptré ainsi qu'au cours du transfert jusqu'au dioptré suivant. Elle se conserve donc à travers tout le système. Cette quantité s'exprime de façon particulière au niveau de l'objet ou de la pupille.

Sur l'objet $l = -nyu$

Sur la pupille $l = nvv$ (v = rayon de la pupille)

1.3.3 DIAMETRE DES LENTILLES

Dans l'approximation paraxiale, la surface utile optique de chaque dioptré est un cercle de rayon h dont le centre se déplace en fonction du champ de $-k$ à k . Une estimation du rayon utile du dioptré est donc simplement $r = |h| + |k|$.

1.3.4 MARCHE D'UN RAYON QUELCONQUE A TRAVERS LE SYSTEME

De nombreuses informations concernant le système étudié peuvent être extraites du tableau paraxial sans avoir à calculer la marche paraxiale de nouveaux rayons. Il suffit pour cela de suivre la démarche suivante basée sur le comportement linéaire d'un système optique dans l'approximation paraxiale :

Considérons un rayon particulier caractérisé au niveau d'un dioptré de départ quelconque par H , sa hauteur d'incidence, et U , l'angle qu'il fait avec l'axe. Ce rayon peut s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire des deux rayons d'ouverture et de champ dont les données h , u , k , v au niveau du dioptré sont consignées dans le tableau paraxial.

on a :

	H, U données du rayon simulé
	h, u données du rayon d'ouverture
$H = Ah + Bk$	avec k, v données du rayons de champ
$U = Au + Bv$	A, B coefficients de la décomposition

Les deux coefficients A et B sont déterminés en inversant le système d'équation précédent :

$$\begin{aligned} A &= (Hv - kU)n/l \\ B &= -(Hu - hU)n/l \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite nous placer au niveau d'un autre dioptré quelconque d'arrivée et connaître immédiatement les quantités H' , U' de l'image du rayon H, U grâce au relations :

	H', U' données du rayon simulé
$H' = Ah' + Bk'$	avec h', u' données du rayon d'ouverture
$U' = Au' + Bv'$	k', v' données du rayon de champ
	A, B coefficients de la décomposition

Cette démarche peut être utilisée pour simuler la marche d'un rayon dans le sens nominal ou bien dans le sens inverse, pour faire passer un rayon à travers tout le système ou bien à travers une partie seulement, pour rechercher la position des images parasites, pour étudier l'effet Narcisse, etc...

1.3.5 DIVERSES EXPRESSIONS UTILES

En menant analytiquement la démarche présentée ci-dessus pour certains rayons judicieusement choisis il est possible d'établir les expressions de diverses quantités paraxiales intéressantes.

rappelons que : h, u, k, v correspondent au dioptré de départ
 h', u', k', v' correspondent au dioptré d'arrivée

FOCALE : On simule le rayon $H=1$ et $U=0$ au niveau du dioptré de départ.

$$\text{On a } F' = -H/U' = \frac{l}{(uv' - v'u')}$$

TIRAGE : avec le même rayon on obtient

$$T' = -H'/U' = -\frac{(uk' - v'h')}{(uv' - v'u')}$$

IMAGE D'UN DIOPTRE : on simule le rayon $H=0$, $U=1$ au niveau du dioptre de départ. La distance x de l'image de ce dioptre par rapport au dioptre d'arrivée est alors :

$$x = -H'/U' = -\frac{(hk' - kh')}{(hv' - ku')}$$

POSITION DE L'OBJET DONNANT LE GRANDISSEMENT ANGULAIRE g_a

On simule le rayon $H=1$ et on recherche les coefficients A et B pour lesquels $U'/U = g_a$. On peut ensuite calculer

$$x = -H/U = \frac{hv' - ku' - g_a(hv - ku)}{u'v' - uv'}$$

Les expressions ci-dessus sont valables pour l'ensemble ou une partie quelconque du système étudié et montrent bien que tout le comportement paraxial du système est entièrement contenu dans le tableau paraxial.

LENS DATA

GAUSSES0						
XOBJ	0.10000E+04	YOBJ	-0.20000E+03	PUP2	0.30000E+02	
LAMBDA1	0.5461	LAMBDA2	0.4861	LAMBDA3	0.6563	
NB	RAYON	EPAISSEUR	IND1	IND2	IND3	VERRE
1	0.000	-51.844	1.000000	1.000000	1.000000	AIR
2	65.860	7.900	1.694010	1.694010	1.694010	LAK9
3	160.720	0.200	1.000000	1.000000	1.000000	AIR
4	38.390	13.430	1.615210	1.615210	1.615210	SK4
5	1250.000	3.560	1.584820	1.584820	1.584820	LF5
6	25.286	14.630	1.000000	1.000000	1.000000	AIR
STOP						
7	0.000	15.000	1.000000	1.000000	1.000000	AIR
8	-30.937	3.950	1.677640	1.677640	1.677640	SF5
9	-238.780	10.670	1.694010	1.694010	1.694010	LAK9
10	-41.256	0.200	1.000000	1.000000	1.000000	AIR
11	188.290	13.430	1.694010	1.694010	1.694010	LAK9
12	-89.090	69.598	1.000000	1.000000	1.000000	AIR
13	0.000	0.000	1.000000	1.000000	1.000000	AIR
>>>PARAX ALL						

PARAXIAL DATA						
nb	h	u'	k	v'	ni	nj
1	30.000	0.03000	0.000	0.20000		
2	28.445	-0.15923	-10.369	0.18256	0.46190	0.04256
3	27.187	-0.15234	-8.927	0.27072	0.01681	0.21518
4	27.156	-0.36375	-8.872	0.25563	0.55503	0.03960
5	22.271	-0.37038	-5.439	0.26045	-0.55875	0.40587
6	20.953	-0.10239	-4.512	0.30841	0.72623	0.12997
7	19.455	-0.10239	0.000	0.30841	-0.10239	0.30841
8	17.919	0.17292	4.626	0.24424	-0.68159	0.15888
9	18.602	0.17200	5.591	0.24210	0.15940	0.37046
10	20.437	-0.05242	8.174	0.27262	-0.54779	0.07449
11	20.426	-0.07539	8.229	0.14303	0.05606	0.31632
12	19.414	-0.27894	10.150	0.16323	-0.49686	0.04930
13	0.000	-0.27894	21.510	0.16323	-0.27894	0.16323

Focale = 98.870 Tirage = 58.965

CHAPITRE 2

LES DERIVEES PARTIELLES PARAXIALES

2.0 INTRODUCTION

Le tableau paraxial étant établi, on peut se demander quels vont être les effets de légères variations de certains paramètres sur les caractéristiques du système optique étudié. Pour cela nous allons nous rattacher à des quantités invariantes à travers le système et élaborer leurs dérivées partielles par rapport aux paramètres de construction.

2.1 INVARIANTS DIFFERENTIELS PARAXIAUX

Les invariants différentiels paraxiaux sont des quantités qui se conservent à travers le système et correspondent à une faible variation du schéma paraxial.

2.1.1 DEPOINTAGE

Une légère modification d'un des paramètres de construction produit un déplacement dx de l'image AB le long de l'axe optique. La quantité $d\xi = nu^2 dx$ qui n'est autre que l'expression de ce dépointage en terme de surface d'onde est un Invariant Différentiel Paraxial.

De la même manière, il apparaît un déplacement de la pupille que l'on peut caractériser par la quantité $d\alpha = nv^2 dp$

$$d\xi = nu^2 dx$$

$$d\alpha = nv^2 dp$$

2.1.2 BALANCEMENT

L'influence d'une modification d'un des paramètres du système se manifeste également en dehors de l'axe. L'image AB de hauteur y se transforme en $A'B'$ de hauteur $y+dy$ et se déplace le long de l'axe de la quantité dx . En introduisant dy , le déplacement de l'impact du rayon de champ dans le plan de l'image AB , on peut montrer que la quantité $d\mu = nu \cdot d\bar{y} = nu(dy - v \cdot dx)$ est un invariant différentiel paraxial.

De la même manière, l'optique pupillaire est perturbée et on peut également introduire l'invariant différentiel paraxial $d\nu$

$$d\mu = nu \cdot d\bar{y} = nu(dy - v \cdot dx)$$

$$d\nu = nv \cdot d\bar{v} = nv(dv - u \cdot dp)$$

2.1.3 EXPRESSIONS COMPLEMENTAIRES

Les invariants différentiels paraxiaux peuvent s'exprimer en fonction des quantités h , u , k , v et de leurs variations dh , du , dk , dv dues à la modification d'un des paramètres. On a les relations :

$$\begin{aligned} d\xi &= n(h \cdot du - u \cdot dh) & d\pi &= n(k \cdot dv - v \cdot dk) \\ d\mu &= n(v \cdot dh - h \cdot du) & d\nu &= n(u \cdot dk - h \cdot dv) \end{aligned}$$

On montre en outre que $d\mu = d\nu$ car l'invariant de Lagrange n'est pas affecté par une modification du système.

2.2 DERIVEES PARTIELLES PARAXIALES

A partir des relations précédentes, on peut établir les expressions des dérivées partielles du dépointage et du balancement par rapport aux paramètres de construction du système. On obtient le tableau suivant :

p	$n_r = n'_{r-1}$	c_r	$e_r = e'_{r-1}$
$\frac{\partial \xi}{\partial p}$	$(hi)_r - (hi')_{r-1}$	$-(n'_r - n_r)h_r^2$	$-n_r \cdot u_r^2$
$\frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{\partial \nu}{\partial p}$	$-(ki)_r + (ki')_{r-1}$	$(n'_r - n_r)h_r k_r$	$n_r \cdot u_r \cdot v_r$
$\frac{\partial \pi}{\partial p}$	$(kj)_r - (kj')_{r-1}$	$-(n'_r - n_r)k_r^2$	$-n_r \cdot v_r^2$

La propriété d'invariance à travers le système nous permet de sommer le dépointage et le balancement produits par différents paramètres variant simultanément.

$$d\xi = \sum_i \frac{\partial \xi}{\partial p_i} \cdot dp_i \quad d\mu = \sum_i \frac{\partial \mu}{\partial p_i} \cdot dp_i \quad d\pi = \sum_i \frac{\partial \pi}{\partial p_i} \cdot dp_i$$

On peut ensuite se placer dans l'espace image ou dans un espace quelconque suivant le dernier paramètre variant et évaluer les effets produits par ces perturbations. Connaissant n' , u' et v' dans l'espace considéré on a :

$$\text{déplacement de l'image.....: } dx' = \frac{d\xi}{n' \cdot u'^2}$$

$$\text{déplacement de la pupille.....: } dp' = \frac{d\pi}{n' \cdot v'^2}$$

$$\text{variation de grandeur apparente...: } d\bar{y}' = \frac{d\nu}{n' \cdot u'}$$

2.3 LES "SOLVES"

Lors de la mise en place d'un système optique ou au cours de son optimisation il est souvent désirable d'ajuster à une valeur spécifiée une des quantités h , u , k , v au niveau de la surface image (ou d'un autre dioptré). Cet ajustement doit être effectué en modifiant un des paramètres du système. Les programmes d'optimisation offrent parfois cette possibilité sous le nom de SOLVE.

Utilisons pour cela les expressions des dérivées partielles paraxiales et inversons le système d'équations du paragraphe 2.1.3. On a :

$$\begin{aligned} dh &= (h.d\mu + k.d\xi)/l & dk &= -(h.d\sigma + k.dv)/l \\ du &= (u.d\mu + v.d\xi)/l & dv &= -(u.d\sigma + v.dv)/l \end{aligned}$$

2.4 CONCLUSION : INTERET DES DERIVEES PARTIELLES

Les notions de dérivées partielles introduites dans ce chapitre sont très importantes car elles interviennent dans tous les programmes d'optimisation de système optique. En effet, la détermination des variations à apporter aux différents paramètres de construction passe par la résolution d'un système d'équations faisant intervenir une matrice des dérivées partielles des "aberrations", au sens le plus général du terme, qu'on cherche à réduire. La majorité des programmes existants calculent ces dérivées partielles numériquement. Dans ce chapitre nous avons montré qu'en ce qui concerne les propriétés paraxiales celles-ci pouvaient être déterminées de façon analytique.

CHAPITRE 3

LE CHROMATISME PARAXIAL

3.0 INTRODUCTION

L'étude paraxiale entreprise dans les chapitres précédents s'appuie sur deux hypothèses qui sont :

Les rayons considérés sont voisins de l'axe. h , u , k , v sont donc infiniment petits par rapport aux paramètres de construction.

Les indices des milieux traversés sont constants.

Nous allons maintenant nous intéresser au premier écart par rapport au comportement paraxial idéal en étudiant l'influence de la variation d'indice due à des changements de longueur d'onde sur les propriétés paraxiales du système.

3.1 LES VERRES D'OPTIQUE

3.1.1 PROPRIETES DES VERRES

Les principales propriétés des verres d'optique utilisées par le calculateur au cours de son travail sont n , l'indice de réfraction pour la longueur d'onde de référence et sa variation autour de cette valeur en fonction de la longueur d'onde que l'on caractérise par la constringence ou nombre d'ABBE γ et le ou les rapports de dispersion partielle P .

Cependant, d'autres propriétés telles que le prix, l'aptitude au polissage, les défauts internes, la transmission etc... ont également une influence déterminante sur le choix d'un verre dans une combinaison. L'ingénieur calculateur devra donc sélectionner les verres avec précaution en fonction de la destination finale de l'instrument en s'appuyant sur les informations contenues dans les catalogues des verriers.

3.1.2 CLASSIFICATION DES VERRES

L'ensemble des verres proposés par chaque fabricant est représenté sur un graphe comportant l'indice n_d (raie d de l'hélium = 587.6nm) en ordonnée et la constringence ou nombre d'ABBE $V_d = (n_d - 1)/(n_F - n_C)$ en abscisse, F et C étant respectivement les raies bleu-vert (486.1nm) et rouge (656.3nm) de l'hydrogène. On distingue deux grandes catégories de verres :

les CROWN de constringence supérieure à 50

les FLINT de constringence inférieure à 50

Cette classification sommaire, vestige des premières recherches sur les verres d'optique, est affinée par une classification par famille en fonction des principaux constituants. Voir par exemple la carte des verres proposées par SOVIREL où sont séparés les crowns (C), les borosilicate crowns (BSC), les fluor crowns (FC), etc...

3.1.3 DESIGNATION DES VERRES

Les verres sont désignés selon une réglementation internationale par un nombre à 6 chiffres (517:642 pour $n_d = 1.517$ et $V_d = 64.2$).

Mais certains verriers ont toujours leur propre désignation. Ainsi, SOVIREL désigne l'équivalent du verre ci-dessus sous l'expression B1664. La lettre indique la première décimale de n_d (A=4, B=5, etc...). les deux premiers chiffres sont les deuxièmes et troisièmes décimales de n_d . Les deux derniers chiffres sont la partie entière de V_d .

SCHOTT emploie les lettres désignant la famille du verre suivies d'un numéro de série. Le verre équivalent du B1664 est le BK7 (Baryum Crown n° 7).

3.1.4 FORMULES DE DISPERSION

De nombreuses formules ont été établies pour exprimer la valeur de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde. La formule sans doute la plus utilisée actuellement, et peut-être la plus précise, est le développement en série de KETTLER-HELMHOLTZ :

$$n^2 = A_0 + A_1 \cdot \lambda^{-2} + A_2 \cdot \lambda^{-4} + A_3 \cdot \lambda^{-6} + A_4 \cdot \lambda^{-8} + A_5 \cdot \lambda^{-10} \quad (\lambda \text{ en } \mu\text{m})$$

Les constantes $A_0, \dots, A_5$ dépendent du verre considéré et sont déterminées expérimentalement à partir de mesures effectuées sur plusieurs fontes. La précision de cette formule est de $\pm 3 \times 10^{-6}$ pour tout le domaine visible. Son inconvénient est de nécessiter la donnée de 6 constantes pour chaque verre.

Des formules plus simples nécessitant un plus petit nombre de coefficients pour chaque verre permettent néanmoins d'obtenir une précision de calcul acceptable. Parmi celles-ci on peut citer le modèle de BUCHDAHL qui converge avec trois coefficients seulement. La longueur d'onde est d'abord remplacée par une variable intermédiaire en faisant intervenir une longueur d'onde de référence.

$$n(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_0}{1 + 2.5(\lambda - \lambda_0)} \quad n(\omega) = N_0 + \gamma_1 \cdot \omega + \gamma_2 \cdot \omega^2 + \dots$$

3.2 CHROMATISME AXIAL

Le chromatisme axial paraxial est le déplacement dx de l'image en fonction de la longueur d'onde. Pour sa détermination nous allons utiliser la dérivée partielle du dépointage par rapport aux indices introduite durant le chapitre précédent en considérant qu'une variation de longueur d'onde se traduit par une variation simultanée de tous les indices du système étudié. On a :

$$[\Delta \xi]_{\lambda_0}^\lambda = \sum_n \frac{\partial \xi}{\partial n'_n} \cdot [\Delta n'_n]_{\lambda_0}^\lambda = \sum_n [(h.i)_{n+1} - (h.i)_n] \cdot [\Delta n'_n]_{\lambda_0}^\lambda = \sum_n -h \cdot n_i \cdot \Delta \left(\frac{dn}{n} \right)_{\lambda_0}^\lambda$$

Les quantités h, i, i' sont obtenues lors de la marche paraxiale du rayon d'ouverture à travers le système. On en tire le déplacement axial du foyer :

$$[\Delta x']_{\lambda_0}^\lambda = \frac{[\Delta \xi]_{\lambda_0}^\lambda}{n' \cdot u'^2}$$

3.3 CHROMATISME LATÉRAL

Le chromatisme latéral est le déplacement dy' de l'impact du rayon de champ sur le plan image nominal en fonction de la longueur d'onde. En utilisant la dérivée partielle du balancement par rapport aux indices on a :

$$[\Delta \mu]_{\lambda_0}^\lambda = \sum_n \frac{\partial \mu}{\partial n'_n} \cdot [\Delta n'_n]_{\lambda_0}^\lambda = \sum_n [-(k.i)_{n+1} + (k.i)_n] \cdot [\Delta n'_n]_{\lambda_0}^\lambda = \sum_n k \cdot n_i \cdot \Delta \left(\frac{dn}{n} \right)_{\lambda_0}^\lambda$$

$$[\Delta y']_{\lambda_0}^\lambda = \frac{[\Delta \mu]_{\lambda_0}^\lambda}{n' \cdot u'} = \sum_n h \cdot n_j \cdot \Delta \left(\frac{dn}{n} \right)_{\lambda_0}^\lambda$$

3.4 NOTIONS DE CHROMATISME SECONDAIRE

3.4.1 DOUBLET ACHROMATIQUE

Considérons le calcul en lentilles minces des puissances des deux lentilles d'un doublet achromatique. Il s'effectue par la résolution du système d'équation ci-contre :

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \\ \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} = 0 \end{cases}$$

Si on utilise dans ces formules les contraintes $\nu_d = (n_d - 1) / (n_F - n_C)$ de deux verres ordinaires tels que B1664 et C2036 de SOVIREL on obtient un doublet de focale unitaire pour la raie d et dont les deux foyers pour les raies C et F sont confondus, mais malheureusement pas sur le foyer de la raie d. Il subsiste du chromatisme secondaire ou "spectre secondaire".

La figure ci-contre nous montre la courbe $dx = f(\lambda)$ du doublet considéré. Le résidu de chromatisme secondaire axial est d'environ 0.06% de la focale.

3.4.2 CONDITION D'APOCHROMATISME PARFAIT

Pour obtenir une annulation parfaite du chromatisme secondaire, c'est à dire pour confondre en un seul point les foyers pour toutes les longueurs d'onde λ_i , il faudrait que les puissances des deux lentilles satisfassent une infinité d'équations du type :

$$\frac{\psi_1}{\nu_1^i} + \frac{\psi_2}{\nu_2^i} = 0 \quad \text{avec } \nu^i = (n_d - 1)/(n_d - n_i)$$

Ceci n'est possible qu'à la condition que toutes les quantités $P_{ij} = (n_d - n_i)/(n_d - n_j)$ appelées **rapports de dispersions partielles** soient égales d'un verre à l'autre. Cette condition est malheureusement loin d'être vérifiée dans la pratique pour les verres courants et ceci montre que, pour la réduction du chromatisme secondaire, l'ingénieur calculateur est totalement dépendant des propriétés des verres disponibles.

3.4.3 DOUBLET A SPECTRE SECONDAIRE REDUIT

Dans le cas du doublet, un des moyens de réduction du chromatisme secondaire consiste à chercher à confondre les foyers pour la longueur d'onde principale L1 et les deux longueurs d'onde extrêmes L2 et L3. Pour cela, il nous faut trouver deux verres pour lesquels les quantités $P = (n_1 - n_2)/(n_1 - n_3)$ sont égales mais en veillant à ce que leurs constringences $\nu = (n_2 - 1)/(n_1 - n_3)$ soient aussi différentes que possible afin de minimiser les puissances relatives des deux lentilles. Dans le but de faciliter cette recherche, les verriers fournissent dans leurs catalogues différents graphes P, ν .

Sur ces graphes, les verres courants se situent sur une droite appelée **droite normale** et il est impossible d'en extraire un couple permettant de réaliser un doublet à spectre secondaire réduit car lorsque les rapports de dispersions partielles sont identiques les constringences le sont aussi. Par contre les progrès récents des verriers ont permis d'élaborer des verres spéciaux dits à dispersion anormale tels que les fluor-crown ou les flints extra denses. La représentation de ces verres sur le graphe P, ν s'éloigne de la droite normale et ils sont donc utilisables pour résoudre ce type de problème.

Le chromatisme axial du doublet A8682-K51 déterminé de cette manière pour les raies g, F et C est très réduit. Les trois foyers sont pratiquement confondus et le résidu de chromatisme n'est que de 0.02% de la focale pour un domaine spectral s'étendant de 0.4 à 0.8 micron.

Les puissances des deux lentilles sont par contre plus importantes que dans le cas du doublet B1664-C2036 et il faudra donc s'attendre à un accroissement des aberrations d'ouverture. Ces dernières constituent le tribut à payer pour la réduction du spectre secondaire.

CHAPITRE 4

LES ABERRATIONS DU 3^{ème} ORDRE

4.0 INTRODUCTION

Au cours des chapitres précédents nous avons étudié les propriétés de formation d'image des systèmes optiques dans l'approximation paraxiale, c'est à dire en nous limitant à des champs et ouvertures très faibles. Un système réel s'écarte malheureusement de ce cas idéal et présente des aberrations fonction de l'ouverture et du champ.

4.1 GENERALITES CONCERNANT LES ABERRATIONS TRANSVERSALES

Considérons un système optique à symétrie de révolution autour de l'axe optique. Un rayon issu du point objet B, à la distance y de l'axe, passant à une distance h du centre de la pupille, présente un impact B' sur la surface image légèrement différent de B'₀ prédit par l'imagerie paraxiale. Il présente des aberrations transversales dY' et dZ'.

A priori, les expressions de dY' et dZ' peuvent s'écrire sous forme d'un développement selon les puissances croissantes de h et y :

$$\begin{aligned} dY' &= A_0 + A_1(y, h) + A_2(y, h) + A_3(y, h) + A_4(y, h) + \dots \\ dZ' &= B_0 + B_1(y, h) + B_2(y, h) + B_3(y, h) + B_4(y, h) + \dots \end{aligned}$$

Les termes constants A₀ et B₀ sont nuls car, si le rayon considéré tend vers l'axe optique (h=y=0), les aberrations transversales sont nulles elles aussi.

De même, les termes A₁ et B₁ sont également nuls si l'on considère que A'B' est l'image paraxiale de AB.

Enfin, si l'on envisage une rotation de 180° autour de l'axe optique, dY' et dZ' changent de signe en même temps que h et y. Tous les termes pairs du développement en série sont donc nuls et il nous reste :

$$\begin{aligned} dY' &= A_3(y, h) + A_5(y, h) + A_7(y, h) + \dots \\ dZ' &= B_3(y, h) + B_5(y, h) + B_7(y, h) + \dots \end{aligned}$$

On montre ainsi qu'un système de révolution ne peut présenter que des aberrations transversales du 3^{ème} ordre, 5^{ème} ordre, etc... telles que SEIDEL les a définies.

4.2 ABERRATIONS TRANSVERSALES - ECART A LA SURFACE D'ONDE

Longtemps, les aberrations ont été décrites en terme d'aberrations transversales dY' et dZ' comme nous l'avons montré dans le paragraphe 4.1. Une façon plus moderne de les décrire consiste à s'intéresser à la déformation de la surface d'onde fournie par le système. L'optique ondulatoire nous apprend en effet que :

Le trajet suivi par la lumière est une extrémale du chemin optique (Principe de FERMAT). Dans un milieu homogène, les rayons se propagent donc en ligne droite.

La surface d'onde émise par un point source est l'ensemble des points situés à égal chemin optique de la source.

Les rayons sont perpendiculaires à la surface d'onde (Théorème de MALUS)

Le stigmatisme rigoureux est obtenu si tous les rayons issus de la source convergent en un même point. La surface d'onde est alors parfaitement sphérique (dans un milieu homogène).

Si un système présente des aberrations, la surface d'onde qu'il fournit est déformée par rapport à la sphère idéale. La mesure de cette déformation le long du rayon caractérise ces aberrations. C'est l'Ecart Aberrant ou Ecart à la Surface d'Onde ($n'\Delta'$) dont l'équivalent anglo-saxon est l'Optical Path Difference (O.P.D)

4.3 LES ABERRATIONS DU TROISIEME ORDRE

SEIDEL a étudié ces aberrations et a montré qu'elles se limitent à cinq termes qui sont l'aberration sphérique, la coma, l'astigmatisme et la courbure, la distorsion.

4.3.1 L'ABERRATION SPHERIQUE

Il s'agit d'une variation de la position de focalisation en fonction de la hauteur d'incidence du rayon dans la pupille. La tache image est de révolution et dans l'approximation du troisième ordre on a :

$$n'\Delta' = a.u'^4$$

$$dY' = -4.a.u'^3$$

$$L = -4.a.u'^2$$

L'équation de la caustique est :

$$\begin{aligned} x &= -12.a.u'^2 \\ y &= -8.a.u'^3 \end{aligned}$$

Un cercle de moindre diffusion est obtenu si on déplace le plan image de $x = 0.75 L$ par rapport au plan image paraxial. La tache image est alors 4 fois plus petite.

Par contre, pour minimiser l'écart quadratique moyen de l'écart à la surface d'onde, il faut se déplacer de $x = 0.5 L$.

4.3.2 LA COMA

Elle se traduit par une variation de grandissement selon la hauteur d'incidence des rayons dans la pupille. Dans l'approximation du troisième ordre on a :

$$n'\Delta' = b.y'.u'^3.\cos(\Psi)$$

$$dy' = b.y'.u'^2.[2 + \cos(2\Psi)]$$

$$dz' = b.y'.u'^2.\sin(2\Psi)$$

Ψ est l'azymuth de l'impact du rayon dans la pupille.

Lorsque le rayon décrit un cercle dans le plan de la pupille, son impact décrit deux fois un cercle de rayon $\rho = b.y'.u'^2$ dont le centre est distant de 2ρ de l'image paraxiale.

4.3.3 L'ASTIGMATISME ET LA COURBURE

L'image d'un point est constituée de deux lignes focales sagittale et tangentielle perpendiculaires. A mi-chemin entre ces focales, la tache est circulaire, c'est le cercle de moindre diffusion.

Dans l'approximation du troisième ordre on a :

$$n'\Delta' = -1/4.y'^2.u'^2.[C-A.\cos(2\Psi)]$$

$$dy' = -1/2.y'^2.u'.(C-A).\cos(\Psi)$$

$$dz' = -1/2.y'^2.u'.(C+A).\sin(\Psi)$$

Les focales sagittale et tangentielle et le cercle de moindre diffusion décrivent une surface courbe en fonction du champ. Leurs courbures sont :

$$C_s = C + A$$

$$C_t = C - A \quad C_{md} = C$$

PETZVAL a ensuite démontré que :

$$C = \mathfrak{P} - 2.A \quad \text{d'où} \quad C_s = \mathfrak{P} - A$$

$$C_t = \mathfrak{P} - 3.A$$

$$\text{avec } \mathfrak{P} = \sum \frac{\Psi_e}{n}$$

4.3.4 LA DISTORSION

Elle ne se traduit que par un déplacement de l'image par rapport à sa position prévue par l'approximation paraxiale. Dans l'approximation de troisième ordre on a :

$$n'\Delta' = D.u'.y'^3.\cos(\Psi)$$

$$\begin{aligned} dy' &= D \cdot y'^3 \\ dz' &= 0 \end{aligned}$$

L'image d'un quadrillage régulier est déformée par la distorsion. Selon son signe, on parle de distorsion en barillet ou en coussinet.

4.3.5 VARIATIONS AVEC L'OUVERTURE ET LE CHAMP

Ces diverses aberrations ont des variations bien précises avec l'ouverture (hauteur h dans la pupille ou angle d'ouverture u') et avec le champ (taille objet y). On peut dresser le tableau récapitulatif suivant qui permet, connaissant les aberrations du troisième ordre pour un champ et une ouverture donnés, de prédire leur amplitude pour un champ et une ouverture différents.

	Aberration sphérique	Coma	Astigmatisme et courbure	Distorsion
Abrerrations transversales	h^3	h^2y	hy^2	y^3
Ecart à la Surface d'onde	h^4	h^3y	h^2y^2	hy^3

4.4 EXPRESSION DES SOMMES DE SEIDEL

Nous allons étudier les aberrations du troisième ordre sous forme d'écart à la surface d'onde et déterminer la déformation apportée successivement par chaque dioptré du système. L'effet final dans l'espace image est obtenu par sommation de la contribution de chaque dioptré en appliquant le théorème de GOUY (conservation de l'écart aberrant le long du rayon).

La figure 4.4 nous montre un dioptré du système avec la pupille, l'objet et l'image qui lui sont associés. La contribution de ce dioptré aux aberrations du troisième ordre s'obtient en calculant $n'\Delta' = (BJB') - (BIB')$ en se limitant aux termes du 4^{ème} degré par rapport à l'ouverture et le champ (h, u, k, v, i, j). Utilisons pour cela l'équation du dioptré limitée aux termes du 4^{ème} ordre. Elle s'écrit :

$$x = \frac{H^2}{2R} + (1+\epsilon) \frac{H^4}{8R^3} \quad H^2 = y^2 + Z^2 \quad \begin{matrix} \epsilon = -1 \\ \text{Parabole} \end{matrix}$$

On aboutit aux formules suivantes qui donnent la contribution de chaque dioptre à l'écart à la surface d'onde pour un rayon s'appuyant sur le contour circulaire de la pupille. Pour obtenir l'effet total il faut sommer les contributions de tous les dioptres :

$$n'\Delta' = S_I + S_{II} \cos(\varphi) + S_{III} \cos(2\varphi) + S_{IV} + S_V \cos(\varphi)$$

$$S_I = -\frac{1}{8} h (n_i)^2 \Delta\left(\frac{u}{n}\right) + \frac{n'-n}{8} \varepsilon h^4 C^3$$

$$S_{II} = -\frac{1}{2} h (n_i)(n_j) \Delta\left(\frac{u}{n}\right) + \frac{n'-n}{2} \varepsilon h^3 k C^3$$

$$S_{III} = -\frac{1}{4} h (n_j)^2 \Delta\left(\frac{u}{n}\right) + \frac{n'-n}{4} \varepsilon h^2 k^2 C^3$$

$$S_{IV} = 2 S_{III} + \frac{\ell^2}{4} \mathcal{S} \quad \text{avec } \mathcal{S} = -C \Delta\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$S_V = -\frac{1}{2} h \frac{(n_j)^3}{(n_i)} \Delta\left(\frac{u}{n}\right) + \frac{1}{2} \frac{n_j}{n_i} \ell^2 \mathcal{S} + \frac{n'-n}{2} \varepsilon h k^3 C^3$$

$$\text{ou bien } S_V = \frac{1}{2} (n_j) \frac{n'-n}{n_i} \left[\frac{n}{n_i} h_j^2 + C u k^2 + h v^2 \right] + \frac{n'-n}{2} \varepsilon h k^3 C^3$$

4.5 RECHERCHE DE CAS PARTICULIERS

Utilisons maintenant les formules ci-dessus pour déterminer des cas particuliers où certaines aberrations seront nulles. Ceci constituera notre premier "savoir-faire" de calcul des combinaisons et nous permettra de mettre en place des formules optiques simples mais performantes.

Dioptre sur l'objet ($h = 0$) Dans ce cas l'aberration sphérique, la coma et l'astigmatisme sont nuls. Il en est d'ailleurs de même pour le chromatisme axial et latéral. La lentille collectrice d'un dispositif de transport de pupille par exemple bénéficie de toutes ces propriétés.

Par contre, de par sa courbure, le dioptre agit sur la courbure de champ mais aussi sur la distorsion. De nombreuses formules optiques sont ainsi corrigées de leur courbure résiduelle par l'ajout d'une lentille de redressement de champ ou lentille de SMITH.

Objet au centre de courbure ($n_i = 0$) Dans ce cas, l'aberration sphérique et la coma sont nulles ainsi que le chromatisme axial.

Pupille au centre de courbure ($n_j = 0$) Dans ce cas, la coma, l'astigmatisme, la distorsion et le chromatisme latéral sont nuls. Cette propriété a été utilisée par Bernard SCHMIDT pour concevoir son télescope à lame correctrice. De même, les "systèmes centrés" constitués uniquement de dioptres centrés sur la pupille sont automatiquement corrigés de toutes ces aberrations.

Points de Weierstrass ($\Delta(u/n) = 0$) Ce sont, avec le centre de courbure, les seuls points pour lesquels le dioptre sphérique est stigmatique. Ils sont très importants car ils donnent la correction de l'aberration sphérique, de la coma et de l'astigmatisme. L'exemple le plus célèbre de leur utilisation est celui de la lentille 1/2 boule des objectifs de microscope à immersion.

Asphérisation du dioptre (ϵ) Enfin, on se rend compte que l'asphérisation d'un dioptre permet de corriger l'ensemble du système de l'aberration sphérique, de la coma, de l'astigmatisme ou de la distorsion. Si le dioptre se situe sur la pupille ($k=0$), seule l'aberration sphérique peut être corrigée.

Le miroir parabolique est le cas le plus simple pour l'aberration sphérique.

Si on asphérise deux dioptres, l'aberration sphérique et la coma peuvent être corrigées. C'est le cas du télescope RITCHIEY - CHRETIEN.

Systèmes symétriques Si un système optique est symétrique autour de la pupille, on se rend compte que les aberrations d'ordre impair en fonction du champ (chromatisme latéral, coma, distorsion) changent de signe quand on passe d'une moitié à l'autre. Il y a donc compensation mutuelle et annulation rigoureuse de ces aberrations. L'expérience montre de plus que si l'on s'écarte de la symétrie rigoureuse, la compensation se conserve bien. Cette propriété a conduit à de nombreuses formules optiques célèbres telle celle du double GAUSS.

4.6 RELATIONS ENTRE LES DIVERSES EXPRESSIONS DES ABERRATIONS

On utilise les relations de NIJBOER pour calculer les aberrations transversales à partir de l'écart à la surface d'onde. On relie ainsi les sommes de SEIDEL à des expressions plus classiques des aberrations. On a :

$$\begin{cases} n'.u'.dy' = 4.S_I.\cos\varphi + S_{II}(2 + \cos 2\varphi) + 2(S_{III} + S_{IV}).\cos\varphi + S_V \\ n'.u'.dz' = 4.S_I.\sin\varphi + S_{II}\sin 2\varphi + 2(S_{IV} - S_{III}).\sin\varphi \end{cases}$$

4.6.1 ABERRATION SPHERIQUE

On a simplement : $dy' = \frac{4 S_I}{n'.u'}$ $\mathcal{L} = \frac{-4 S_I}{n'.u'^2}$

4.6.2 COMA

Le rayon de la tache de coma est : $\rho = \frac{S_{II}}{n'.u'}$

4.6.3 ASTIGMATISME ET COURBURE

La figure 4.3.3 montre la position la plus fréquente des deux focales sagittales et tangentielles données par un système astigmatique.

$$\begin{cases} \Delta s' = -2 \frac{S_{IV} - S_{III}}{n'.u'^2} \\ \Delta r' = -2 \frac{S_{IV} + S_{III}}{n'.u'^2} \end{cases}$$

Les dépointages des deux focales par rapport au plan image paraxial sont :

L'apport du système aux courbures des surfaces images sagittales et tangentielles est :

$$\begin{cases} \frac{C'_T}{n'} = \frac{C_T}{n} - 4 \cdot \frac{S_{IV} + S_{III}}{l^2} \\ \frac{C'_S}{n'} = \frac{C_S}{n} - 4 \cdot \frac{S_{IV} - S_{III}}{l^2} \end{cases}$$

4.6.4 DISTORSION

Le déplacement de l'image est : $dy' = \frac{S_{II}}{n' u'}$

La distorsion exprimée en % est : $D(\%) = -100 \cdot \frac{S_{II}}{l}$

4.6.5 RAPPEL - DEFOCALISATION

L'expression de l'écart à la surface d'onde dû à une défocalisation dx' est :

$$n' \Delta' = \frac{1}{2} n' u'^2 dx'$$

4.7 RELATIONS DE WYNNE

De la même manière que pour l'optique objective on peut déterminer, dans l'approximation du 3^{ème} ordre, les aberrations de l'image de la pupille. On obtient évidemment pour ces aberrations des expressions analogues aux formules de SEIDEL en changeant h en k , u en v , i en j et l en $-l$. On les appellera T_1 , T_2 , T_3 , T_4 et T_5 .

WYNNE a établi, entre autres, les relations suivantes entre les aberrations objectives et pupillaires :

$$\begin{cases} S_I = T_I - \frac{1}{2} l \cdot \Delta(v^2) \\ S_{III} = T_{III} - \frac{1}{4} l \cdot \Delta(u \cdot v) \\ S_{II} = T_{II} - \frac{1}{2} l \cdot \Delta(u^2) \end{cases}$$

4.8 VARIATION DES ABERRATIONS A INVARIANT DE LAGRANGE CONSTANT

On peut étudier l'influence sur les aberrations d'une légère modification du fonctionnement paraxial du système. Les modifications envisagées seront un déplacement de l'objet, un déplacement de la pupille et une variation de la grandeur de l'objet. On impose en outre la contrainte de conservation de la valeur de l'invariant de LAGRANGE au cours de ces modifications. Ceci nous permet de réutiliser les notions de dépointage et de balancement introduites au chapitre des DERIVEES PARTIELLES PARAXIALES.

4.8.1 VARIATION DE LA POSITION DE LA PUPILLE

La figure 4.8.1 montre que, pour conserver la valeur de l'invariant de LAGRANGE, il faut faire varier le diamètre de la pupille selon son déplacement afin de maintenir la valeur de l'angle d'ouverture.

On peut alors exprimer les nouvelles valeurs des aberrations en fonction des anciennes et de la quantité $\mathcal{A}$. Il faut noter que ces relations sont valables quelle que soit l'amplitude du déplacement de la pupille et que la quantité $\mathcal{A}$ se conserve à travers le système. Les formules sont donc applicables à un dioptré comme au système entier.

La quantité $\mathcal{A}$ est proportionnelle au dépointage de la pupille $d\pi$.

Si le déplacement de la pupille est faible, les puissances supérieures de $\mathcal{A}$ pourront être négligées.

$$\Delta S_I = 0 \quad \mathcal{A} = \frac{l}{nu^2} \Delta\left(\frac{1}{AP}\right) = \frac{\Delta k}{h}$$

$$\Delta S_{II} = 4 \mathcal{A} S_I$$

$$\Delta S_{III} = \mathcal{A} S_{II} + 2 \mathcal{A}^2 S_I$$

$$\Delta S_{IV} = 2 \Delta S_{III}$$

$$\Delta S_V = 2 \mathcal{A} (S_{IV} + S_{III}) + 3 \mathcal{A}^2 S_{II} + 4 \mathcal{A}^3 S_I$$

4.8.2 VARIATION DE LA POSITION DE L'OBJET

La figure 4.8.2 montre que, pour conserver la valeur de l'invariant de LAGRANGE, il faut faire varier la taille de l'objet avec son déplacement afin de maintenir la valeur de l'angle de champ.

On peut alors exprimer la variation des aberrations en fonction de la quantité $d\xi/l$ où apparaît le dépointage de l'objet.

Voir la matrice générale en fin de paragraphe.

4.8.3 VARIATION DE LA TAILLE OBJET

La figure 4.8.4 montre comment conserver la valeur de l'invariant de LAGRANGE en introduisant une variation du diamètre de la pupille.

La variation des aberrations s'exprime alors en fonction de la quantité $d\mu/l$ où apparaît le balancement.

4.8.4 MATRICE GENERALE

La variation des aberrations en fonction d'une perturbation paraxiale de faible amplitude caractérisée par les dépointages $d\xi$, $d\pi$ et le balancement $d\mu$ peut se résumer sous la forme matricielle ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} dS_I \\ dS_{II} \\ dS_{III} \\ dS_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{II} + \frac{l}{8} \Delta(u^2) & 4S_I & 0 \\ 2(S_{III} + S_{IV}) + \frac{l}{2} \Delta(uv) & 2S_{II} & 4S_I \\ S_{II} + \frac{l}{4} \Delta(v^2) & 0 & S_{II} \\ 4S_I & -2S_{II} & 2(S_{III} + S_{IV}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{l} \\ \frac{d\mu}{l} \\ \frac{-d\pi}{l} \end{bmatrix}$$

$dS_{IV} = 2 dS_{III} \quad (\text{car } d\ell = 0 \text{ et } d\mathcal{P} = 0)$

4.9 CONCLUSION

Les formules des aberrations du troisième ordre sont importantes pour deux raisons :

Quantitativement, elles permettent l'étude paramétrique et la synthèse de systèmes optiques (voir les chapitres LENTILLE MINCE et DOUBLET par exemple). Il ne faudra pourtant pas oublier les aberrations d'ordre supérieur qui limitent la validité des résultats obtenus à des ouvertures et champs modérés.

Qualitativement, elles permettent de comprendre comment évoluent ces aberrations avec les paramètres de construction du système et d'en tirer des règles et principes universels.

Elles constituent donc un outil extrêmement précieux pour l'ingénieur calculateur aussi bien au niveau de l'avant projet qu'au niveau de l'optimisation sur ordinateur.

Nous allons maintenant les utiliser pour étudier quelques systèmes optiques très simples : la lame à faces planes et parallèles, la lentille simple, le doublet, le télescope.

CHAPITRE 5

LA LAME à FACES PLANES ET PARALLELES

5.1 PROPRIETES GENERALES

Rappelons d'abord quelques propriétés générales de la lame à faces planes et parallèles.

Décalage axial

$$d = e \cdot (n-1)/n$$

Décalage latéral

$$l = e \cdot \sin(i-r)/\cos(r)$$

Epaisseur optique = e/n

$$d'où \quad x'_2 = x_1 - e/n$$

Quelle que soit la longueur d'onde on a :

$$g_y = g_\alpha = 1$$

5.2 CHROMATISME PARAXIAL

L'application des formules du chromatisme paraxial du chapitre 3 nous donne les résultats ci-dessous.

On se rend compte que le chromatisme axial est toujours surcorrigé, c'est à dire que l'image bleue est située plus loin que l'image rouge contrairement à une lentille convergente ordinaire.

$$\begin{aligned} [\Delta \xi]_{\lambda_0}^{\lambda} &= u^2 \cdot \frac{dn}{n^2} \cdot e & [\Delta \eta]_{\lambda_0}^{\lambda} &= \frac{dn}{n^2} \cdot e \quad \text{surcorrigé} \\ [\Delta \nu]_{\lambda_0}^{\lambda} &= -u \cdot v \cdot \frac{dn}{n^2} \cdot e & [\Delta \bar{y}]_{\lambda_0}^{\lambda} &= -v \cdot \frac{dn}{n^2} \cdot e \end{aligned}$$

5.3 ABERRATIONS DU TROISIEME ORDRE

L'application des formules des sommes de SEIDEL pour la lame à faces planes et parallèles nous donne les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S_I &= -\frac{1}{8} \cdot u^4 \cdot \frac{n^2-1}{n^3} \cdot e & \text{surcorrigé} \\ S_{II} &= -\frac{1}{2} \cdot u^3 \cdot v \cdot \frac{n^2-1}{n^3} \cdot e \\ S_{III} &= -\frac{1}{4} \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot \frac{n^2-1}{n^3} \cdot e & \text{surcorrigé} \\ S_{IV} &= 2 S_{III} \quad \text{car } \mathcal{P} = 0 \\ S_V &= -\frac{1}{2} \cdot u \cdot v^3 \cdot \frac{n^2-1}{n^3} \cdot e \end{aligned}$$

L'examen de ces expressions nous permet de tirer divers enseignements très utiles dans la pratique :

Les expressions ne font intervenir que les angles d'ouverture u et de champ v et pas les hauteurs d'incidence h et k . Les aberrations fournies par la lame à faces planes et parallèles ne dépendent donc pas de la position axiale de la lame dans le faisceau. Ce résultat demeure en outre valable pour les ordres supérieurs.

L'aberration sphérique est en surcorrection. L'aberration sphérique longitudinale $\mathcal{L}$ est positive, c'est à dire en sens inverse de celle obtenue au foyer image d'une lentille convergente.

L'astigmatisme est également en surcorrection. Les courbures des surfaces image sagittales et tangentielles sont positives.

Si l'objet est à l'infini ($u=0$), toutes les aberrations sont nulles et la lame n'induit aucune aberration (chromatisme y compris). Ce résultat demeure également valable pour les ordres supérieurs.

Si la pupille est à l'infini ($v=0$), Toutes les aberrations de champ sont nulles. Seule subsiste l'aberration sphérique (et le chromatisme axial).

Rappelons également que la plupart des prismes de renvoi, de redressement d'image, de rotation d'image, etc.. sont équivalents à des lames à faces planes et parallèles très épaisses et que les formules et considérations exposées ci-dessus leurs sont directement applicables.

CHAPITRE 6
LA LENTILLE SIMPLE

6.1 LA LENTILLE EPAISSE

Pour une lentille épaisse on a les propriétés paraxiales suivantes :

Puissance $\varphi = (n-1) \cdot (C_1 - C_2) + e \frac{(n-1)^2}{n} \cdot C_1 \cdot C_2$

Plans principaux

$$X_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi} \quad \varphi_2 = (1-n) \cdot C_2$$

$$X_2 = \frac{e}{n} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi} \quad \varphi_1 = (n-1) \cdot C_1$$

6.2 LA LENTILLE MINCE - CALCUL PARAXIAL ET CHROMATISME

Pour les lentilles minces, des formules simples peuvent être établies pour le calcul paraxial ainsi que pour le chromatisme paraxial.

PUISSANCE : on a $\varphi = (n-1) \cdot (C_1 - C_2)$ $C = 1/R$

DEVIATION : un rayon traversant une lentille mince à la hauteur d'incidence h (k pour le rayon de champ) subit une déviation D.

$$D = -h \cdot \varphi$$

CHROMATISME AXIAL : Le dépointage dû au chromatisme axial est

$$[\Delta \xi] = -h^2 \cdot \frac{\varphi}{v} \quad d\alpha' = -\alpha'^2 \cdot \frac{\varphi}{v}$$

CHROMATISME LATERAL : Le balancement dû au chromatisme latéral est

$$[\Delta \rho] = h \cdot k \cdot \frac{\varphi}{v}$$

ASSOCIATION DE LENTILLES MINCES : Pour un ensemble de lentilles minces on a les formules suivantes :

$$h_o \cdot \Phi = \sum h \cdot \varphi$$

$$[\Delta \xi] = \sum -h^2 \cdot \frac{\varphi}{v}$$

$$[\Delta \rho] = \sum h \cdot k \cdot \frac{\varphi}{v}$$

LENTILLES ACCOLEES : si les lentilles sont accolées (doublet ou triplet) les formules se réduisent à :

$$\Phi = \sum \varphi \quad \text{si} \quad \sum \frac{\varphi}{v} = 0 \quad \text{alors} \quad [\Delta \xi] = [\Delta \rho] = 0$$

6.3 ABERRATIONS DU TROISIEME ORDRE DES LENTILLES MINCES

Les aberrations du troisieme ordre des lentilles minces s'expriment en fonction de quelques quantités :

$$\text{La puissance } \varphi = (n-1) \cdot (C_1 - C_2) \quad \text{d'où} \quad C_1 = \gamma + \varphi/2(n-1)$$

$$\text{La cambrure } \gamma = (C_1 + C_2)/2 \quad C_2 = \gamma - \varphi/2(n-1)$$

On introduit également la proximité moyenne de l'objet ζ avec :

$$\begin{aligned} 1/x' - 1/x &= \varphi & \text{d'où} & \quad u' - u = -h \cdot \varphi \\ 1/x' + 1/x &= 2\zeta & & \quad u' + u = -2 \cdot h \cdot \zeta \end{aligned}$$

Les sommes de SEIDEL s'expriment alors en fonction de deux polynômes

$$Q = \frac{n+2}{n} \cdot \varphi \cdot \gamma^2 - 4 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \varphi \cdot \zeta \cdot \gamma + \frac{3n+2}{n} \cdot \varphi \cdot \zeta^2 + \frac{n^2}{4(n-1)^2} \cdot \varphi^3$$

$$P = \frac{n+1}{n} \cdot \varphi \cdot \gamma - \frac{2n+1}{n} \cdot \varphi \cdot \zeta$$

On a :

$$S_I = \frac{h^4}{8} \cdot Q$$

$$S_{II} = \frac{1}{2} [h^3 \cdot k \cdot Q + 2 \cdot h^2 \cdot P]$$

$$S_{III} = \frac{1}{4} [h^2 \cdot k^2 \cdot Q + 2 \cdot h \cdot k \cdot P + 2 \cdot \varphi]$$

$$S_{IV} = 2 S_{III} + \frac{\varphi^2}{4n}$$

$$S_V = \frac{1}{2} [h \cdot k^3 \cdot Q + 3 \cdot h \cdot k^2 \cdot P + \frac{3n+1}{n} \cdot \frac{\varphi^2}{h} \cdot \varphi]$$

6.4 QUELQUES COMMENTAIRES**6.4.1 ABERRATION SPHERIQUE**

Pour une lentille mince, elle dépend directement du polynôme Q. Elle varie donc quadratiquement avec la cambrure γ .

Pour le point objet à l'infini, seul un minimum peut être obtenu pour la cambrure : $\gamma_{a.s.}^{\infty} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \varphi$

La lentille est alors proche de la forme plan-convexe avec la face convexe tournée vers l'objet à l'infini.

6.4.2 COMA

Si la pupille est placée sur la lentille ($k=0$), le polynôme P intervient seul et la coma varie linéairement avec la cambrure.

Pour le point objet à l'infini, la coma s'annule pour la cambrure : $\gamma_{coma}^{\infty} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \varphi$

Si la pupille n'est pas sur la lentille ($k=0$), le polynôme Q intervient et induit une variation quadratique de la coma avec la cambrure et linéaire avec la position de la pupille. La position de la pupille qui annule la coma est alors donnée par :

$$k_{coma} = - \frac{Q.P}{h.Q}$$

Par contre, si l'aberration sphérique est corrigée ($Q=0$), la coma ne variera pas avec la position de la pupille.

6.4.3 ASTIGMATISME ET COURBURE

Si la pupille est placée sur la lentille ($k=0$), les sommes de SEIDEL se réduisent à :

$$\begin{cases} S_{III} = Q^2 \frac{\varphi}{4} \\ S_{IV} = Q^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{Q^2 \varphi}{4\kappa} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} C_s = -\varphi \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \\ C_\tau = -\varphi \left(3 + \frac{1}{\kappa}\right) \end{cases} \quad C_{md} = -\varphi \left(2 + \frac{1}{\kappa}\right)$$

La forme de la lentille n'agit pas sur l'astigmatisme et la courbure !

Si la pupille n'est pas placée sur la lentille, l'astigmatisme est une fonction complexe de la cambrure et de la position de la pupille (k).

il existe deux cambrures qui annulent S_{III} si k est figé

il existe deux positions de pupille qui annulent S_{III} si $Q \neq 0$

si la lentille est aplanétique ($Q=P=0$) S_{III} ne varie pas avec k

L'astigmatisme est minimum pour la position de la pupille donnée par :

$$k_{S_{III} \min} = - \frac{Q.P}{h.Q} = k_{coma}$$

6.4.4 DISTORSION

Si la pupille est placée sur la lentille, la distorsion est nulle.

6.4.5 GENERALISATION

Les commentaires développés ci-dessus à propos de l'effet du déplacement de la pupille restent valables pour un système mince constitué de plusieurs lentilles minces accolées. C'est le cas du doublet ou du triplet notamment.

Remarquons qu'on a aussi démontré qu'un système mince aplanétique (corrigé de la coma et de l'aberration sphérique), ne peut pas être corrigé en même temps de l'astigmatisme. Il subsiste un astigmatisme irréductible qui vaut :

6.5 L'OBJECTIF BOX CAMERA

Les expressions précédentes montrent qu'il y a deux solutions au problème de la correction de la coma et de l'astigmatisme pour une lentille simple avec un diaphragme séparé. La version diaphragme avant fut découverte expérimentalement par WOLLASTON vers 1812; c'est la "Landscape Meniscus Lens". KODAK utilisa par contre la version diaphragme arrière sur ses "Box Camera". On retrouve simplement ces deux solutions en faisant travailler l'un des dioptrés avec la pupille au centre de courbure et l'autre pour ses point de WEIERSTRASS.

CHAPITRE 7

LE DOUBLET ACHROMATIQUE

7.0 INTRODUCTION

Chester Moor HALL découvrit vers 1733 qu'en combinant un verre du type Crown avec un verre du type Flint le chromatisme axial pouvait être considérablement réduit. John DOLLAND reprit l'invention et la fit breveter en 1958.

Aujourd'hui, à l'aide des formules des chapitres précédents, on peut entièrement définir un doublet composé de deux lentilles minces accolées. On obtient ainsi un très bon point de départ pour une optimisation sur ordinateur.

7.1 NOTATIONS ET CONVENTIONS

Pour les lentilles L1 et L2 du doublet on a :

φ la puissance
 n l'indice du verre
 ν sa constringence
 γ la cambrure
 C et C' les courbures des faces
 $\bar{C}$ la proximité moyenne

$$\text{avec } \bar{C}_1 = \frac{1}{x} + \varphi_1 \quad \bar{C}_2 = \bar{C}_1 + \frac{\varphi}{2}$$

7.2 EQUATIONS

Nous pouvons alors écrire diverses équations que peut satisfaire le doublet sachant que les inconnues à trouver sont les puissances et cambrures des deux lentilles.

7.2.1 EQUATION DE CONVERGENCE

On désire que le doublet ait une puissance donnée : $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

7.2.2 EQUATION D'ACHROMATISME

On désire la correction du chromatisme axial : $O = \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}$

La correction du chromatisme latéral est alors automatique car le doublet est un système mince.

7.2.3 CORRECTION DE L'ABERRATION SPHERIQUE

On écrit que la somme des polynômes Q des deux lentilles est nulle :

$$A_1 \cdot \gamma_1^2 - 2 \cdot B_1 \cdot \gamma_1 + C_1 + A_2 \cdot \gamma_2^2 - 2 \cdot B_2 \cdot \gamma_2 + C_2 = 0$$

$$\text{avec : } A = \frac{n+2}{n} \cdot \varphi \quad B = \frac{2n+2}{n} \cdot \varphi \cdot \bar{C} \quad C = \frac{3n+2}{n} \cdot \varphi \cdot \bar{C}^2 + \frac{n^2}{4(n-1)^2} \cdot \varphi^3$$

7.2.4 CONDITION DE COLLAGE

Pour que le doublet soit collable il faut que $C_1' = C_2$. Cela s'écrit :

$$\gamma_1 - u_1 = \gamma_2 - u_2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\varphi}{2(n-1)}$$

7.2.5 CORRECTION DE LA COMA

On écrit que la somme des polynômes P des deux lentilles est nulle :

$$G_1 \gamma_1 - H_1 + G_2 \gamma_2 - H_2 = 0$$

$$\text{avec : } G = \frac{n+1}{n} \cdot \varphi \quad H = \frac{2n+1}{n} \cdot \varphi \cdot z$$

7.3 RESOLUTIONS

7.3.1 PUISSANCE DES LENTILLES

Les puissances des deux lentilles sont obtenues en résolvant le système formé des deux équations 7.2.1 et 7.2.2. On a :

$$\varphi_1 = \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \cdot \varphi \quad \varphi_2 = \frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \cdot \varphi$$

La lentille convergente est toujours en verre crown de forte constringence (faible dispersion) et la divergente en verre flint.

7.3.2 CALCUL D'UN CLAIRAUT

Si l'on désire que le doublet soit achromatique et collé, seule l'aberration sphérique pourra être corrigée. Ce sera un CLAIRAUT dont les cambrures sont obtenues en résolvant le système des équations 7.2.3 et 7.2.4. On obtient deux couples de solutions γ_1 et γ_2 .

7.3.3 CALCUL D'UN APLANAT

Si le doublet n'est pas collé, la correction de l'aberration sphérique et de la coma est possible en résolvant le système formé par les équations 7.2.3 et 7.2.5. On obtient aussi deux couples de solutions.

Peut-on obtenir un doublet achromatique, collé et aplanétique ? Cela est en fait possible, mais il faut jouer pour cela sur de nouveaux paramètres qui sont les indices et constringences des lentilles. Un choix judicieux des verres nous permet alors d'obtenir un doublet du type CLAIRAUT - MOSSOTTI.

7.3.4 REPRESENTATION GRAPHIQUE

Les équations 7.2.3, 7.2.4 et 7.2.5 peuvent se représenter graphiquement sur un diagramme ayant les cambrures γ_1 et γ_2 en abscisse et ordonnée.

La correction de l'aberration sphérique se traduit par une hyperbole, le collage et la correction de la coma par une droite.

Les intersections de ces droites avec l'hyperbole nous donnent les diverses solutions. Les solutions à faibles cambrures sont préférées à

celles à forte cambrure car les incidences sur les dioptries sont plus faibles et les aberrations d'ordre supérieur réduites.

Si l'une des droites est tangente à l'hyperbole on parle de forme limite mais ceci n'est qu'une considération mathématique sans intérêt pratique réel.

Représentation graphique
des équations du doublet

Doublet aplanétique

BK7 - SF6

deux solutions
convergente avant

et

deux solutions
divergente avant

CHAPITRE 8

MIROIRS ET TELESCOPES

8.0 INTRODUCTION

Les miroirs présentent certains avantages par rapport aux systèmes réfractifs qui sont :

l'absence de chromatisme

la possibilité de les réaliser en grandes dimensions (8.2 m pour le télescope VLT à comparer aux 1.1 m du plus grand réfracteur)

aberrations géométriques plus faibles

Ces raisons font que les systèmes optiques à composés uniquement de miroirs (catoptriques) ou combinant lentilles et miroirs (catadioptriques) sont les instruments privilégiés de l'astronomie, de l'observation spatiale, des applications X, UV ou submillimétriques.

8.1 SOMMES DE SEIDEL

Pour les miroirs, les expressions des sommes de SEIDEL se simplifient car :

$$u' = -u - 2.h.C$$

$$\Delta(u/n) = 2.h.C/n$$

$$\mathcal{P} = 2.C/n$$

On a alors :

$$S_I = -\frac{n}{4} [h^2.i^2.C + \varepsilon.h^4.C^3]$$

$$S_{II} = -n [h^2.i.j.C + \varepsilon.h^3.k.C^3]$$

$$S_{III} = -\frac{n}{2} [h^2.j^2.C + \varepsilon.h^2.k^2.C^3]$$

$$S_{IV} = 2 S_{III} + \frac{\mathcal{Q}^2 C}{2n}$$

$$S_X = -n \left[\frac{j}{i} \left(h^2.j^2 - \frac{\mathcal{Q}^2}{n^2} \right).C + \varepsilon.h.k^3.C^3 \right]$$

$$\text{ou bien } S_X = n.j. [-h.j^2 + C.u.k^2 + h.v^2] - n.\varepsilon.h.k^3.C^3$$

8.2 LE TELESCOPE À DEUX MIROIRS

Le télescope à deux miroirs est un instrument simple et performant ayant de nombreuses applications pratiques. L'étude de ses aberrations du troisième ordre est encore assez simple pour pouvoir être entièrement menée analytiquement après avoir défini judicieusement les données de départ. Le schéma de calcul est alors :

DONNEES : h_1, h_2 hauteur du rayon d'ouverture sur les miroirs 1 et 2
 $u_1 = 0$ objet à l'infini
 u'_2 angle d'ouverture dans l'espace image
 $k_1 = 0$ pupille sur le miroir 1
 v_1 angle de champ dans l'espace objet
 e distance entre les deux miroirs (on pose $e > 0$)

RESULTATS PARAXIAUX :

focale $F' = -\frac{h_1}{u'_2}$

tirage $t = -\frac{h_2}{u'_2} - e$

courbure des miroirs

$$C_1 = -\frac{h_1 - h_2}{2 \cdot h_1 \cdot e} \quad C_2 = -\frac{h_1 - h_2 + e u'_2}{2 \cdot h_2 \cdot e}$$

SOMMES DE SEIDEL :

$$S_I = -\frac{1}{4} \left[h_1^4 \cdot C_1^3 - h_2^4 \cdot C_2 (u'_2 + h_2 C_2)^2 + h_1^4 \cdot C_1^3 \cdot \varepsilon_1 - h_2^4 \cdot C_2^3 \cdot \varepsilon_2 \right]$$

$$S_{II} = -v_1 \left[h_1^3 \cdot C_1^2 - h_2^3 \cdot (u'_2 + h_2 C_2) \cdot (1 - e \cdot C_2) \cdot C_2 - \varepsilon_2 h_2^3 e C_2^3 \right]$$

$$S_{III} = -\frac{v_1^2}{2} \left[h_1^2 \cdot C_1 - h_2^2 (1 - e C_2)^2 \cdot C_2 - \varepsilon_2 \cdot h_2^2 e^2 C_2^3 \right]$$

$$S_{IV} = 2 S_{III} + \frac{\varrho^2}{2} \cdot (C_1 - C_2)$$

$$S_V = v_1^3 \left[(1 - e C_2) \cdot e C_2 \cdot (h_2 \cdot (2 - e \cdot C_2) - 2 \cdot h_1 \cdot C_1 \cdot e) + \varepsilon_2 \cdot h_2 \cdot e^3 \cdot C_2^3 \right]$$

On se rend très vite compte qu'il est nécessaire d'asphériser au moins l'un des miroirs pour obtenir la correction de l'aberration sphérique. En fonction des coefficients d'asphérisation, divers types de télescopes ont été définis :

PRESSMAN - CAMICHEL : le miroir primaire est sphérique. Le secondaire est asphérisé pour corriger l'aberration sphérique. La coma est très forte.

DALL - KIRKHAM : Le secondaire est sphérique. Le primaire est asphérisé pour corriger l'aberration sphérique. Forte coma.

CASSEGRAIN : Le primaire est parabolique. Le secondaire est hyperbolique pour assurer la correction de l'aberration sphérique. Il subsiste toujours de la coma.

RITCHEY - CHRETIEN : Les deux miroirs sont asphérisés pour obtenir la correction simultanée de l'aberration sphérique et de la coma.

RAPPELS SUR LES CONIQUES

Les dioptries asphériques de révolution dont la méridienne est une conique ont une importance particulière du fait de leurs propriétés de stigmatisme entre leurs foyers. On rappelle ici quelques définitions et équations.

EQUATION EN COORDONNEES CARTESIENNES

a : 1/2 distance entre sommets
c : 1/2 distance entre les foyers

e : excentricité

PARABOLE

$$x = y^2 / 2P$$

ELLIPSE

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

HYPERBOLE

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

On peut alors établir l'expression de la quadrique de révolution rapportée au sommet. Elle s'écrit :

$$(1 + \epsilon)x^2 + y^2 + z^2 - 2Rx = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} R : \text{rayon de courbure au sommet} \\ \epsilon = -e^2 : \text{constante de conicité} \end{matrix}$$

$$\epsilon < -1$$

HYPERBOLOIDE

$$SF = c - a \quad SF = -c - a$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$R = b^2/a \quad \epsilon = -c^2/a^2$$

$$\epsilon = -1$$

PARABOLOIDE

$$SF = R/2$$

$$-1 < \epsilon < 0$$

ELLIPSOIDE ALLONGE

$$SF = a - c \quad SF = a + c$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$R = b^2/a \quad \epsilon = -c^2/a^2$$

$$\epsilon > 0$$

ELLIPSOIDE APLATI

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$R = a^2/b$$

$$\epsilon = c^2/b^2$$

Ces expressions permettent de déterminer entièrement un dioptre en conique de révolution à partir des positions des points pour lesquels on désire le stigmatisme.

Nota : l'ellipsoïde aplati n'est pas stigmatique pour les rayons extramériidiens.

CHAPITRE 9

LES PROGRAMMES D'OPTIMISATION

9.0 INTRODUCTION

Les différentes étapes du calcul d'une combinaison optique peuvent se représenter selon la figure ci dessous :

L'étape qui constitue le travail le plus fastidieux et le plus long est sans aucun doute celle des retouches de la combinaison sélectionnée pour en améliorer les performances : c'est l'OPTIMISATION. Il s'agit, par des tâtonnements successifs, de trouver les variations à donner aux différents paramètres de la combinaison tels que courbures, épaisseurs, indices et dispersions de façon à ce que le système s'améliore et converge vers une solution acceptable.

L'arrivée des premiers ordinateurs a totalement révolutionné le calcul des combinaisons optiques car les durées d'optimisation qui se chiffraient en mois se comptent maintenant en minutes, voire en secondes. Pour arriver à ces résultats des méthodes et algorithmes d'optimisation ont été développés et adaptés aux ordinateurs.

Nous allons étudier dans un premier temps la fonction de mérite qui sert à mesurer la qualité du système en cours d'optimisation puis présenter la méthode des moindres carrés pondérés qui est sans doute l'algorithme le plus utilisé actuellement. Un survol des différents programmes disponibles dans le commerce sera également effectué.

9.1 LA FONCTION DE MERITE

Il s'agit de représenter sous forme d'une fonction la qualité (ou plutôt les défauts) du système que l'on désire améliorer. On utilise pour cela une forme quadratique du type :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_a} \omega_i^2 (ab_i - b_i)^2$$

ab_i : valeur actuelle de l'aberration i
 b_i : but visé pour cette aberration
 ω_i : poids relatif attribué

Le mot aberration doit être pris ici dans son sens le plus général puisqu'il peut aussi bien s'agir de la focale du système, de l'aberration sphérique transversale zonale que du poids d'un élément. De plus le but visé n'est pas forcément nul (Ex : Focale de 100 mm)

Le poids donné aux aberrations est à déterminer judicieusement afin de les placer à un même niveau d'importance relative (Ex : 1 mm d'écart à la focale, 20 microns d'aberration sphérique transversale et 0.1 micron d'écart à la surface d'onde).

Cette fonction de mérite dépend évidemment des paramètres de construction du système optique qui sont très nombreux. Prenons le cas du triplet de TAYLOR. Les paramètres sont au nombre de 17 :

- 6 rayons de courbure
- 5 épaisseurs et intervalle d'air
- 3 indices de réfraction
- 3 constringences

Ce grand nombre de paramètres constitue la première difficulté de l'optimisation en calcul optique.

La seconde difficulté réside dans le fait que la fonction de mérite peut varier très fortement en fonction de certains paramètres et très faiblement avec d'autres. Ces variations sont en outre loin d'être monotones.

On peut se représenter la fonction de mérite comme une surface présentant en relief montagneux dans l'hyper-espace des paramètres de construction du système.

Il est de la responsabilité de l'ingénieur calculateur de définir et construire la fonction de mérite qui sera utilisée pour optimiser le système. Cette étape est très importante car, indépendamment de l'algorithme utilisé qui peut assurer une convergence plus ou moins rapide, le succès ou l'échec de l'optimisation dépend entièrement de la qualité de la fonction de mérite qui

ne doit pas être trop succinte par rapport au but visé car alors l'optimisation est rapide mais le résultat risque de ne pas satisfaire les spécifications;

ne doit pas être trop complexe par rapport au but visé car alors l'optimisation est plus lente et difficile et une solution au problème réel pourrait même ne pas être trouvée.

Il apparaît ainsi qu'il ne peut exister de fonction de mérite universelle qui serait adaptée à la fois pour l'optimisation d'un objectif Zoom photo 24X36 et d'un objectif de photoréduction pour circuits intégrés. De nombreux programmes du commerce proposent une fonction de mérite par défaut qu'il convient donc d'utiliser avec précaution. Par contre celle-ci peut parfois grandement faciliter la tâche du calculateur pour résoudre des problèmes simples.

9.2 LES MOINDRES CARRES PONDERES

Quand sont apparus les premiers ordinateurs, des recherches ont tout de suite été entreprises pour traduire la démarche de retouches successives en un algorithme automatique. Encore faut-il que cet algorithme assure une convergence suffisamment rapide vers la solution.

La méthode intuitive de progression selon la ligne de plus grande pente de la fonction de mérite (Steepest Descent) est vite apparue comme totalement inefficace car d'une lenteur de convergence désespérante dans les cas pratiques.

C'est alors la méthode des moindres carrés pondérés (Damped Least Squares), inventée par LEVENBERG en 1944, qui s'est imposée par sa relative simplicité et sa grande efficacité. C'est sans doute la méthode la plus utilisée aujourd'hui encore dans la majorité des programmes d'optimisation disponibles dans le commerce. Sa formulation mathématique est la suivante :

Soit $\Phi = \sum_{i=1}^{N_a} \omega_i \cdot \theta_i^2$ la fonction de mérite décrivant la qualité du système que l'on désire améliorer.

Soit θ_i^0 la valeur initiale de l'aberration i ($i = 1 \dots N_a$)

Soit Δp_j la variation que va subir le paramètre P_j ($j = 1 \dots N_p$)

Soit $a_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial p_j}$ la dérivée partielle de l'aberration i par rapport au paramètre j

L'aberration θ_i peut alors s'écrire sous forme d'un développement en série limité aux termes du 1^{er} ordre :

$$\theta_i = \theta_i^0 + \sum_{j=1}^{N_p} a_{ij} \cdot \Delta p_j$$

Il s'agit donc

de minimiser la fonction : $\Phi = \sum_{i=1}^{N_a} \left[\omega_i \cdot \theta_i^0 + \sum_{j=1}^{N_p} \omega_i \cdot a_{ij} \cdot \Delta p_j \right]^2$

La solution du problème est le point pour lequel Φ est stationnaire par rapport aux paramètres P_j , c'est à dire :

$$\forall k \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{N_a} \left[\omega_i \cdot \theta_i^0 + \sum_{j=1}^{N_p} \omega_i \cdot a_{ij} \cdot \Delta p_j \right] a_{ik} \cdot \omega_i = 0$$

On obtient ainsi un système de N_p équations à N_p inconnues qui s'écrit sous forme matricielle en introduisant les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_a 1} & \dots & a_{N_a N_p} \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{N_a} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \vdots \\ \Delta p_{N_p} \end{bmatrix} \quad F^0 = \begin{bmatrix} \theta_1^0 \\ \vdots \\ \theta_{N_a}^0 \end{bmatrix}$$

Soit $M = W \cdot A$

et $R = W \cdot F^0$

Le système d'équations s'écrit alors

$$M^T \cdot M \cdot Q + M^T \cdot R = 0$$

Mais l'hypothèse de linéarité n'est pas totalement réaliste. En effet la résolution brutale du système ci-dessus peut conduire à des variations très importantes des paramètres de construction du système qui ne conduisent pas du tout à une réduction effective de la valeur de la fonction de mérite. Pour éviter ce problème et limiter les variations des paramètres LEVENBERG a ajouté à la fonction de mérite le terme :

$$\Phi' = P \sum_{j=1}^{N_p} c_j^2 \Delta p_j^2 \quad \text{avec } P \text{ le Damping Factor}$$

c_j le poids associé à P_j

$$\text{On a } \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi'}{\partial p_k} = P \cdot c_k^2 \cdot \Delta p_k \quad \text{et, introduisant la matrice } C = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{N_p} \end{bmatrix}$$

le système d'équations devient $(M^T \cdot M + P \cdot C) \cdot Q + M^T \cdot R = 0$

Le processus est répété successivement jusqu'à l'obtention du plus proche minimum de la fonction de mérite où plus aucune amélioration ne peut être obtenue.

9.3 PERFECTIONNEMENTS - AUTRES METHODES

L'algorithme présenté ci-dessus n'est en fait que le noyau de base autour duquel viennent se greffer différents modules destinés à en accroître l'efficacité.

9.3.1 GESTION DU DAMPING FACTOR

Une gestion astucieuse de la valeur du damping factor permet de tirer le maximum d'efficacité de chacune des passes d'optimisation. Il faut pour cela évaluer les non linéarités et modifier sa valeur en conséquence.

9.3.2 MOINDRES CARRÉS PONDERÉS ADDITIFS OU MULTIPLICATIFS

Telle que présentée ci-dessus, la méthode des moindres carrés pondérés consiste à ajouter un terme à chaque élément diagonal de la matrice $M^T.M$. D'où la dénomination de "additif".

Une autre façon consiste à multiplier les éléments diagonaux par un nombre du type $1+P$. Cette façon assure généralement une meilleure vitesse de convergence car les grandes disparités entre les valeurs des éléments diagonaux sont ainsi préservées.

9.3.3 PRISE EN COMPTE DE CONTRAINTES

Durant l'optimisation on ne peut laisser varier avec une totale liberté certains paramètres du système. Par exemple les épaisseurs des lentilles doivent rester positives, les verres doivent se situer dans la carte des verre du commerce, certaines courbures doivent demeurer identiques, etc...

Ces contraintes se traduisent mathématiquement par des égalités ou inégalités fonction des paramètres variables du système qu'il s'agit de maintenir durant l'optimisation. Il faut pour cela faire appel à des méthodes d'optimisation sous contraintes bien plus complexes que la méthode des moindres carrés pondérés décrite ci-dessus.

9.3.4 CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES

La mise en oeuvre de la méthode des moindres carrés pondérés (ou de toute autre méthode d'optimisation) nécessite la détermination des dérivées partielles des aberrations par rapport aux paramètres de construction du système. Ceci peut se faire de deux façons :

Numériquement par différence finie. C'est la façon la plus simple à programmer mais elle nécessite beaucoup de calculs à mener avec une grande précision. C'est la méthode la plus couramment employée.

Analytiquement après avoir établi leur expression. La programmation est alors plus laborieuse mais le temps de calcul est réduit et la précision améliorée.

9.3.5 AUTRES METHODES D'OPTIMISATION

Donald DILWORTH a développé une méthode appelée **Pseudo Second Derivative Damped Least Squares** qui prend en compte une valeur approchée des dérivées secondes. La vitesse de convergence est alors améliorée.

David GREY a proposé en 1963 la méthode des **Modes Orthonormaux** très différente des moindres carrés pondérés. Une itération consiste en n étapes le long de directions orthogonales dans l'hyperespace des paramètres de constructions. La méthode est très efficace mais délicate à mettre en oeuvre surtout dans le cas d'optimisation avec contraintes.

GLATZEL, avec sa **Méthode Adaptative**, a abordé l'optimisation sous un autre angle. Au lieu de corriger un grand nombre d'aberrations avec un moins grand nombre de paramètres, sa méthode consiste à corriger successivement de petits groupes d'aberrations avec des paramètres en plus grand nombre.

9.4 QUELQUES REMARQUES

Après notre excursion dans les méthodes mathématiques d'optimisation, il importe de préciser que l'optimisation sur ordinateur, quel que soit le perfectionnement de la méthode utilisée, est toujours comparable à la progression d'un aveugle dans un relief montagneux qui a pour mission de trouver le plus haut sommet en s'aidant uniquement de sa canne. Tout ce qu'il trouvera, plus ou moins vite, est le sommet au pied duquel il a été déposé. Le programme d'optimisation trouvera l'optimum le plus proche et ne peut trouver que celui-là.

On comprend alors l'importance capitale du point de départ proposé par l'ingénieur calculateur. La qualité finale obtenue ne dépend en effet que de ce point de départ et non du trajet plus ou moins direct et rapide suivi pour arriver à l'optimum.

Il y a donc une complémentarité entre les programmes automatiques d'optimisation et l'homme car :

Les programmes automatiques

- Permettent de résoudre des problèmes simples par des non-experts
- Permettent de gérer un grand nombre de variables, ce qui représenterait un travail impossible pour l'homme
- Apportent vitesse de calcul et précision
- Permettent de raffiner l'optimisation à l'extrême pour "extraire la dernière goutte de sang" d'une combinaison donnée

L'ingénieur Calculateur

- Fixe un point de départ aussi proche que possible de la meilleure solution
- Est capable d'analyser l'évolution de l'optimisation et de procéder à des modifications radicales améliorant les qualités du système.

9.5 LES PROGRAMMES DU COMMERCE

Ces dernières années plusieurs fournisseurs de logiciel de calcul optique ont vu le jour. Un large choix s'offre donc aujourd'hui depuis le simple programme d'analyse à 200 \$ jusqu'au logiciel évolué loué 12000 \$ par an.

Dans le même temps la puissance de calcul des ordinateurs s'est considérablement accrue et les PC type 386 ou les "workstation" permettent aujourd'hui de mener des calculs de façon tout à fait professionnelle. Il n'en reste pas moins que l'ordinateur n'est qu'une machine et que la qualité du système final dépend surtout de l'expérience et du discernement dont doit faire preuve le "Lens Designer", en employant la dénomination anglo-saxonne beaucoup plus conforme à la noblesse de son travail.

CHAPITRE 10

INTRODUCTION AU TOLERANCEMENT

10.0 INTRODUCTION

Une fois une formule optique établie, il est nécessaire de s'assurer que la combinaison définie est réalisable à un coût raisonnable et que la performance exigée par le client sera effectivement obtenue.

Pour cela, une marge minimum doit exister entre les performances de la formule théorique et le besoin opérationnel. Il est alors de la responsabilité de l'ingénieur calculateur de s'assurer que les moyens et les technologies de fabrication maintiendront les dégradations de réalisation à l'intérieur de cette marge. Il lui faut pour cela procéder à un calcul de tolérances et établir un budget d'erreur.

10.1 QUE TOLERANCER ?

Dans le budget d'erreur doivent intervenir tous les éléments de réalisation qui sont susceptibles d'engendrer des pertes de performance s'ils sont mal maîtrisés. On peut distinguer :

PARAMETRES DU CALCUL	PERTURBATIONS ASSYMETRIQUES
Rayons de courbure	Prisme entre faces des lentilles
Coefficients d'asphérisation	Excentrement des éléments
Epaisseurs et intervalles d'air	Inclinaison des éléments
Indices et constringences	

AUTRES ELEMENTS à TOLERANCER

Irrégularités de polissage des faces
Homogénéité et biréfringence des verres
Environnement thermique, gradients
Environnement mécanique, gravité
Environnement radiatif

10.2 POUR OBTENIR QUOI ?

La performance recherchée peut être de plusieurs natures :

PARAXIAL	QUALITE IMAGE	AUTRE
Focale	dimension de tache	Planéité champ
Tirage	Surface d'onde F.T.M.	Distorsion Registration spectrale

10.3 MATRICE COUT-TOLERANCE

Dans le calcul de tolérance interviennent des considérations économiques qui guideront le choix des moyens de réalisation et détermineront le coût final de l'instrument. L'ingénieur calculateur doit donc disposer d'une matrice coût - tolérances telles que celle présentée

ci-dessous. Cette matrice est bien sûr à compléter et à modifier en fonction de l'outil de production dont on dispose.

	FAIBLE COUT	STANDARD	PRECISION	HAUTE PRECISION
Rayon (anneaux)	50	10	5	1
Régularité (franges)	10	2	1	1/4
Epaisseur (mm)	0.5	0.2	0.1	0.05
Indice	0.002	0.002	0.001	0.0002
Homogénéité indice	1E-4	2E-5	5E-6	1E-6
Prisme (rd)	0.005	0.001	0.0003	0.0001

etc...

10.4 EVALUATION DES SENSIBILITES

La majorité des programmes d'optimisation du commerce propose une aide au tolérancement en permettant le calcul des dérivées partielles des aberrations par rapport aux paramètres de construction et aux perturbations assymétriques. Pour les autres éléments à tolérer, il faut faire appel à d'autres moyens plus spécifiques.

Mais, il n'est pas toujours nécessaire de disposer de moyens de calcul sophistiqués. En effet, on se rend vite compte que l'effet d'une perturbation dans un système est :

notable au niveau paraxial

faible pour les aberrations du troisième ordre

négligeable pour les ordres supérieurs

La théorie des perturbations paraxiales, des aberrations du troisième ordre et celles des aberrations d'excentrement du troisième ordre sont donc bien adaptées à l'analyse des perturbations pour l'établissement d'un budget d'erreur.

10.5 LA NOTION DE COMPENSATEUR

Durant la phase de tolérancement, il est fondamental de prendre en compte les possibilités d'ajustage sur l'instrument en fin de réalisation. Chaque perturbation envisagée se trouve alors compensée partiellement par un réglage. La prise en compte de ces **compensateurs** permet alors :

de relâcher les tolérances et baisser les coûts (à isoperformance)
ou bien
d'améliorer les performances (à isocoût)

Le compensateur le plus simple est la refocalisation de la surface image. Il peut être remplacé par le déplacement axial d'une lentille ou d'un groupe à l'intérieur du système.

Il y a aussi l'inclinaison de la surface image, l'excentrement ou l'inclinaison d'un composant ou d'un groupe.

Enfin, une retouche de polissage finale sur un dioptre bien choisi permet de compenser bien des défauts. C'est le cas limite de l'appairage des composants.

L'ingénieur calculateur doit donc avoir des connaissances précises en méthodes d'assemblage pour fournir, avec la formule optique, la logique de fabrication et d'assemblage de l'instrument et le budget d'erreur qui lui est associé.

10.6 UN PEU DE STATISTIQUE

L'établissement d'un budget d'erreur fait appel à des notions de statistique que nous rappelons brièvement. Soit un système optique dont la qualité est mesurée par une fonction Ψ , fonction des paramètres de construction p_i .

Les paramètres p_i sont entachés d'une erreur aléatoire de réalisation variant entre $-\Delta p_i$ et $+\Delta p_i$.

La dégradation de qualité induite $\Delta \Psi_i$ dépend linéairement de Δp_i . On peut donc écrire : $\Delta \Psi_i = a_i \cdot \Delta p_i$

En présence d'erreur sur les nombreux paramètres définissant le système, le théorème central limite nous dit que la dégradation de qualité suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ . La densité de probabilité est :

$$\rho(\Delta \Psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta \Psi - \mu}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} \quad \begin{cases} \sigma^2 = \sum (a_i \cdot \sigma_i)^2 \\ \mu = \sum a_i \cdot \mu_i \end{cases}$$

Si les densités de probabilité des erreurs sur les paramètres p_i sont toutes uniformes entre $-\Delta p_i$ et $+\Delta p_i$ on a :

$$\mu_i = 0 \rightarrow \mu = 0 \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \Delta \Psi_0^2 \quad \text{avec} \quad \Delta \Psi_0^2 = \sum \Delta \Psi_i^2$$

La probabilité que la dégradation soit comprise entre $-\Delta \Psi_0$ et $+\Delta \Psi_0$ est alors de 91.7 %.

10.7 UN EXEMPLE

Etablissons le budget des erreurs de courbure de l'objectif de GAUSS du chapitre paraxial pour que l'écart quadratique moyen de la surface d'onde soit inférieur à $0.13 \mu\text{m}$ au meilleur coût.

n°	nb ring coût impact			nb ring coût impact			nb ring coût impact			COUTS
2	10	2	0.048							50 ring = 1
3	10	2	0.036							
4	10	2	0.095							10 ring = 2
5	10	2	0.011							
6	10	2	0.064							
8	10	2	0.067							5 ring = 3
9	10	2	0.001							
10	10	2	0.081							
11	10	2	0.067							1 ring = 4
12	10	2	0.051							
TOTAL		20	0.187							