

PROPAGATION GUIDÉE**M. MONERIE**

*LAB/OCM/FOG, Centre National d'Etudes des Télécommunications,
Route de Trégastel, BP. 40, F-22301 Lannion, France*

RESUME : Le chapitre I traite des principes généraux de la propagation en espace libre et des fondements de la propagation guidée. Les principes physiques sous-jacents aux phénomènes observés sont expliqués dans la mesure du possible. Le fil directeur est constitué par les deux notions, fondamentales dans la propagation guidée, de quantification des paramètres de propagation (constantes de propagation et champs modaux) et de couplage de modes (interférences entre modes propres, levée de dégénérescence). Deux articles sur la propagation sur fibre publiés récemment viennent préciser et compléter les notions fondamentales abordées dans le chapitre I.

I. GENERALITES SUR LA PROPAGATION

I.1 Le problème de la propagation

I.1.a Les équations de base

Dans tous les développements qui suivent, et sauf mention particulière, nous considérons uniquement des milieux *homogènes, permanents et linéaires*. Ces trois hypothèses fondamentales traduisent l'invariance spatiale et l'invariance temporelle des propriétés macroscopiques des milieux étudiés et la linéarité de leurs réponses à une excitation électromagnétique.

Nous partirons des équations de Maxwell :

$$(1.1) \quad \text{Rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(1.2) \quad \text{Rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

\cdot est le symbole employé pour la convolution. $\vec{\mu}$, $\vec{\epsilon}$ et $\vec{\sigma}$ sont respectivement les tenseurs de permittivité diélectrique, de perméabilité magnétique et de conductivité électrique. \vec{E} et \vec{H} sont les champs électrique et magnétique de l'onde (champs à trois composantes spatiales), ceux-ci étant considérés comme des fonctions du temps. $\vec{E} = \vec{E}(t)$. \vec{D} et \vec{B} sont les inductions correspondantes. Notons que la réalité microscopique correspond à \vec{B} champ magnétique et \vec{H} induction magnétique (1). Sauf cas particulier, nous ne nous intéressons qu'à des milieux diélectriques pour lesquels $\vec{\sigma}$ est identiquement nul. Ces tenseurs sont d'ordre deux (à neuf éléments).

Nous écrirons également les *relations constitutives* reliant les inductions \vec{D} et \vec{B} aux champs \vec{E} et \vec{H} (sous la forme ci-dessous, elles expriment la linéarité et l'homogénéité du milieu) :

$$(1.3) \quad \vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

$$(1.4) \quad \vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{H}$$

Les équations (1.1) à (1.4) doivent être comprises comme étant des relations *temporelles* entre les champs et les inductions. $\vec{\epsilon}$ et $\vec{\mu}$ sont la permittivité et la perméabilité *percuSSIONNELLES* du milieu. Dans le cas de milieux non dispersifs, $\epsilon(t) = \epsilon \delta(t)$. Les produits de convolution (1.3) et (1.4) se transforment en produits ordinaires en prenant les transformées de Fourier des différents termes. En utilisant la notation en champ complexe $\vec{E} = \vec{A}_c \exp(i\omega t)$, les relations précédentes deviennent (2) :

$$(1.5) \quad \text{Rot} \vec{E} = - i\omega \vec{\mu} \vec{H}$$

$$(1.6) \quad \text{Rot} \vec{H} = i\omega \vec{\epsilon} \vec{E}$$

$$(1.7) \quad \vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$$

$$(1.8) \quad \vec{B} = \vec{\mu} \vec{H}$$

$\vec{\mu}$ et $\vec{\epsilon}$ sont alors les tenseurs de perméabilité et de permittivité *fréquentiels* caractérisant le milieu. Dans des milieux passifs sans perte, $\vec{\epsilon}$ et $\vec{\mu}$ sont *hermitiens* ($\vec{\epsilon}^* = \vec{\epsilon}$, où $\vec{\epsilon}^*$ est la matrice adjointe de $\vec{\epsilon}$). Dans les développements qui suivent, nous nous intéressons uniquement à des milieux dont la perméabilité est scalaire et égale à celle du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$).

La relation de conservation des charges permet de compléter les équations de Maxwell:

$$(1.9) \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$(1.10) \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

où ρ est la densité de charges dans le milieu. Dans la pratique, ρ est nul pour les milieux considérés.

Nous terminons l'ensemble des équations de base par les *relations de continuité* sur une interface plane séparant deux milieux '1' et '2' :

$$(1.11) \quad \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad \text{continuité de B normal}$$

$$(1.12) \quad \vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad \text{continuité de } \vec{E} \text{ tangent}$$

$$(1.13) \quad \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \omega$$

$$(1.14) \quad \vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

où ω et \vec{K} sont les densités superficielles de charge et de courant à l'interface. Dans les milieux que nous étudions, ces deux quantités sont habituellement nulles, de sorte que les relations (1.13) et (1.14) deviennent :

$$(1.15) \quad \text{continuité de D normal et de } \vec{H} \text{ tangent}$$

1.1.b La résolution d'un problème de propagation

Un problème de propagation se présente en général sous la forme suivante : connaissant les caractéristiques du champ électromagnétique sur une surface donnée, calculer les paramètres du champ en un autre endroit de l'espace. Une autre version de ce problème consiste à calculer les caractéristiques que doit posséder le milieu de propagation pour donner un champ final connu, le champ incident étant donné, ou encore à calculer le champ initial connaissant le milieu et le champ de sortie. La solution consiste à chercher les modes propres de propagation de la structure comprise entre le "départ" et l'"arrivée", à décomposer le champ incident sur ces modes propres (qui forment une base complète), à faire propager ces modes selon leurs caractéristiques propres, et à les recombinaer ensuite pour retrouver le champ total.

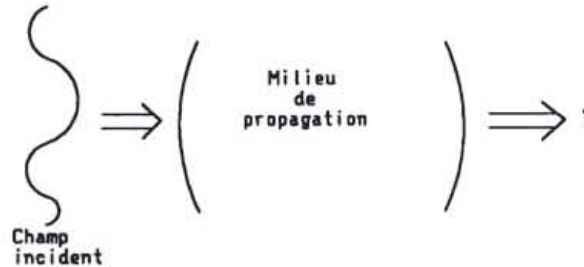


Figure 1.1 : Le problème de la propagation

Le problème revient donc à déterminer les modes propres de propagation, c'est-à-dire à résoudre les équations de Maxwell en tenant éventuellement compte des conditions de continuité aux interfaces (remarquons que certains problèmes très spécifiques peuvent être traités sans passer par les modes propres du système (2)).

En espace libre, plusieurs bases peuvent être utilisées en fonction du problème à traiter. Nous nous intéressons ici à une propagation directionnelle, et nous privilégions donc une direction de l'espace appelée *axe de propagation* et classiquement notée Oz. Une base astucieuse pour traiter le problème est alors constituée par des ondes planes de la forme:

$$(I.16) \quad (\vec{E}, \vec{H}) = (\vec{E}_0, \vec{H}_0) \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

\vec{k} est le vecteur d'onde de module $2\pi/\lambda$ et dont le vecteur directeur est la normale aux plans de phase.

I.1.c Ondes planes dans un milieu isotrope

Les équations (I.5) à (I.8) se simplifient considérablement dans le cas d'un espace isotrope. En effet, $\vec{\epsilon}$ est alors scalaire, ce qui entraîne $\text{div} \vec{E} = 0$. Les dérivées par rapport à x et y étant nulles par définition de l'onde plane, on obtient $e_z = 0$ (nous prenons comme indiqué ci-dessus une propagation selon z). Les ondes solutions des équations de Maxwell ont la composante longitudinale du champ électrique nulle, et sont donc de type *Transverse Electrique* (TE). (I.5) donne alors $h_z = 0$: les ondes sont également de type *Transverse Magnétique* (TM). On en déduit $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$, c'est-à-dire l'orthogonalité des vecteurs champ électrique et champ magnétique. De plus, si le vecteur d'onde est réel (milieu sans gain ni perte), les deux champs sont en phase ($ke_x = -\omega\mu h_x$ et $ke_y = -\omega\mu h_y$).

Dans le cas isotrope, il y a dégénérescence d'ordre deux, les directions x et y étant équivalentes. La relation existant entre les composantes e_x et e_y décrit l'état de polarisation du champ :

$$(I.17) \quad e_y = \lambda e_x \exp(i\phi)$$

La polarisation est :

- linéaire pour $\phi = p\pi$,
- circulaire pour $\phi = (2p + 1)\pi/2$ et $\lambda = 1$,

- elliptique dans tous les autres cas.

Ces dénominations proviennent de la courbe décrite par l'extrémité du vecteur champ électrique lors de sa propagation. Notons que nous devrions normalement trouver *trois* états de polarisation indépendants ($2s + 1$, avec $s = 1$, par analogie avec la mécanique quantique). Le fait de trouver ici seulement deux états de polarisation indépendants est dû au fait qu'il n'existe pas pour les ondes électromagnétiques l'équivalent des vibrations longitudinales.

Le rapport entre les amplitudes des champs électrique et magnétique est appelé *impédance d'onde* et vaut 376.6Ω dans le vide: $Z = |\vec{E}| / |\vec{H}| = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ($\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$, $\epsilon_0^{-1} \sim 36\pi \cdot 10^9$).

L' *énergie volumique électromagnétique* dans un milieu linéaire, non dispersif et sans perte s'exprime sous la forme :

$$(I.18) \quad W = \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{\epsilon}\vec{E} + \vec{H}\vec{\mu}\vec{H}) = \frac{1}{4} (\vec{E}\vec{\epsilon}\vec{E}^* + \vec{H}\vec{\mu}\vec{H}^*)$$

selon que l'on travaille en champ réel $\vec{E} = \vec{A}_R \cos(\omega t + \phi)$ ou en champ complexe $\vec{E} = \vec{A}_C \exp(i\omega t)$. L'astérisque signifie la conjugaison complexe. Cette expression (I.18) est employée généralement pour des milieux "transparents" et reste vraie si ces milieux ont peu de pertes. En revanche, même si les pertes sont "nulles", les milieux sont dispersifs. La formulation rigoureuse fait intervenir $\partial(\omega\vec{\epsilon})/\partial\omega$ (2), qui se réduit à $\vec{\epsilon}$ dans le cas de milieux non dispersifs (même chose pour $\vec{\mu}$).

La *puissance transportée* par l'onde plane est donnée, en Wm^{-2} , par la partie réelle du flux du vecteur de Poynting à travers une surface unité, dans une direction donnée. Elle s'exprime par la relation :

$$(I.19) \quad P = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$$

selon que l'on travaille en champ réel ou complexe.

I.1.d Vitesse de phase, vitesse de groupe

Ces notions, que nous établissons ici à l'occasion de la propagation en espace isotrope, sont tout-à-fait générales. La *vitesse de phase* v_p est la vitesse de propagation des plans de phase. La phase est constante sur des plans d'équation $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante}$. Ce sont des plans perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} qui se déplacent à la vitesse $v_p = \omega/k$.

Dans certains cas particuliers, cette vitesse de phase peut être supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Cette apparente contradiction vient du fait suivant : la vitesse de phase n'est pas la vitesse de propagation de l'énergie. Une onde plane monochromatique n'a pas d'existence physique (dans le cas que nous traitons, c'est le caractère monochromatique qui doit être remis en cause). Tout "signal" physique (et plus généralement toute répartition réelle de champ électromagnétique) est une localisation spatio-temporelle d'énergie. Les outils mathématiques de base habituellement utilisés (ondes planes monochromatiques) délocalisent l'énergie (ou plus exactement le concept d'énergie n'a pas de sens pour chacune des fonctions de base). Pour ces raisons, un champ réel est nécessairement représenté (dans le formalisme des ondes planes monochromatiques) par un phénomène d'interférences faisant intervenir une infinité (ou un continuum) d'ondes de base. Un signal physique est donc modélisé

de manière plus réaliste par un *paquet d'ondes* que l'on peut, en faisant abstraction de l'aspect "ondes planes", représenter sous la forme :

$$(I.20) \quad \Psi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(k) \exp(i\omega t - kz) dk$$

avec, pour une onde *quasi-monochromatique*, $\Lambda(k)$ très peu étendu autour du vecteur d'onde moyen k_0 correspondant à la fréquence centrale ω_0 (le caractère d'onde plane n'est pas remis en cause ici). ω est une fonction de k , non linéaire dans le cas d'un milieu dispersif (dispersion matériau et/ou de guide). En développant k en série de Taylor au premier ordre autour de k_0 , on aboutit à la formulation :

$$(I.21) \quad \Psi(z,t) = \exp(i\omega_0 t - k_0 z) \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(k) \exp\left[(k - k_0) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} t - z\right)\right] dk$$

Cette relation définit une onde de fréquence ω_0 se déplaçant à la vitesse de phase ω/k et modulée par une enveloppe dont le maximum se déplace à la *vitesse de groupe* $v_g = \partial\omega/\partial k$ calculée pour k_0 . Ce résultat n'est valable que pour un signal possédant un spectre de fréquences étroit eu égard à la dispersion (i.e. $(\Delta k)^2 (\partial^2 \omega / \partial k^2) \ll 1$).

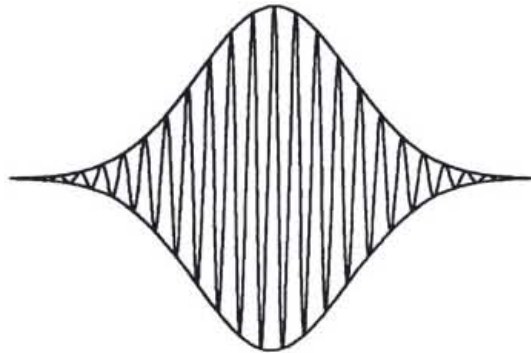


Figure 1.2 : Champ d'un signal codé en amplitude
Le signal résulte des interférences d'un "paquet d'ondes". L'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe. A l'intérieur de l'enveloppe, les fronts d'onde se déplacent à la vitesse de phase.

La notion de vitesse de groupe est à utiliser dans tout problème faisant intervenir la répartition spectrale d'énergie, ou plus généralement des fréquences différentes ou des dérivées par rapport à la fréquence (temps de propagation d'un signal, intervalle spectral libre d'un résonateur Fabry-Pérot, dispersion chromatique,...). Dans les autres cas, et en règle générale pour tout problème d'interférométrie au sens large (battement entre deux ou plusieurs ondes), c'est la notion de phase (i.e. constante de propagation) qui doit être utilisée (résonances d'un Fabry-Pérot, interférences dans un interféromètre, interférences entre modes de propagation,...). Notons que, dans un milieu non dispersif, $v_g = v_p$.

1.1.e L'équation de dispersion

Les équations (1.5) et (1.6) donnent l'équation de dispersion permettant le calcul des vecteurs propres et des valeurs propres. En les combinant et en utilisant la relation d'analyse vectorielle $\text{Rot}(\text{Rot}\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$, on obtient :

$$(1.22) \quad \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = k_0^2 \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

où $\vec{\epsilon}$, est le tenseur de permittivité réduite $\vec{\epsilon}/\epsilon_0$, avec

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) \begin{pmatrix} \partial_x^2 E_x + \partial_y^2 E_x + \partial_z^2 E_x \\ \partial_x^2 E_y + \partial_y^2 E_y + \partial_z^2 E_y \\ \partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z + \partial_z^2 E_z \end{pmatrix} \quad \nabla^2 \vec{E} \begin{pmatrix} \partial_x^2 E_x + \partial_y^2 E_x + \partial_z^2 E_x \\ \partial_x^2 E_y + \partial_y^2 E_y + \partial_z^2 E_y \\ \partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z + \partial_z^2 E_z \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites (1.11) à (1.15) permettent de résoudre complètement le problème.

1.2 Propagation dans des milieux de permittivité non scalaire

1.2.a Milieu anisotrope uniaxe

On montre qu'il existe pour tout milieu linéaire, permanent et non dispersif un système particulier d'axes orthogonaux dans lequel le tenseur de permittivité est diagonal. Dans le cas d'un milieu anisotrope, ces axes sont réels, et leur orientation caractérise les axes *principaux* du milieu. Cette propriété n'est vraie rigoureusement, comme la plupart des propriétés que nous énoncerons dans la suite, que pour des milieux sans pertes. Les pertes, en général faibles pour les milieux "transparents" (faible signifie ici négligeable sur une longueur d'onde), peuvent ensuite être traitées comme une perturbation.

Dans un diélectrique anisotrope, les vecteurs champ et induction électrique ne sont plus colinéaires en général (cf. 1.3), sauf s'ils sont orientés suivant l'un des axes de symétrie électrique qui sont les directions propres de $\vec{\epsilon}$. Dans un milieu à permittivité non scalaire, la résolution du problème de la propagation n'est pas aussi triviale que celle de la section 1.1.c. Nous pouvons cependant tirer des informations de l'examen des équations de départ, toujours en recherchant les solutions sous forme d'ondes planes se propageant dans la direction z . (1.9), $\vec{\mu}$ scalaire et (1.10) permettent d'affirmer que \vec{D} et \vec{H} sont situés dans le plan d'onde perpendiculaire au vecteur d'onde \vec{k} , donc que le champ est TM. En revanche, puisque $\vec{\epsilon}$ n'est pas scalaire, $\text{div}\vec{E}$ n'est pas nul dans le cas général. Puisque ∂_x et ∂_y sont nuls, (hypothèse des ondes planes), nous en déduisons que $\epsilon_z \neq 0$, donc que le champ n'est pas TE en général.

Dans le cas d'un milieu anisotrope uniaxe, l'ellipsoïde des indices est de révolution autour de l'axe optique OZ. Dans ce système d'axes (OX et OY peuvent être pris arbitrairement dans le plan perpendiculaire à OZ), le tenseur de permittivité est diagonal : $\vec{\epsilon} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$, avec $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Nous choisirons pour le calcul une constante de propagation β (donc Oz) et Oy dans le plan (OY,OZ). Dans les axes de propagation, $\vec{\epsilon}_{xy} = \vec{R} \vec{\epsilon}_{xyz} \vec{R}^{-1}$, où \vec{R} est la matrice rotation d'axe OX et d'angle A faisant passer des axes cristallins aux axes de propagation (cf. figure 1.3).

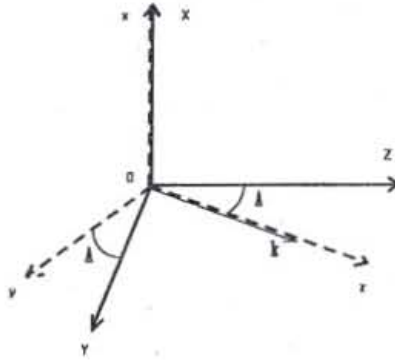


Figure 1.3 : Propagation dans un milieu anisotrope uniaxe

En posant $c = \cos(A)$ et $s = \sin(A)$, on obtient :

$$(1.23) \quad \vec{\epsilon}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & c^2\epsilon_y + s^2\epsilon_z & cs(\epsilon_y - \epsilon_z) \\ 0 & cs(\epsilon_y - \epsilon_z) & s^2\epsilon_y + c^2\epsilon_z \end{pmatrix}$$

En injectant cette valeur de $\vec{\epsilon}_{\text{eff}}$ dans (1.22), on obtient le système à résoudre :

$$(1.24) \quad \begin{pmatrix} \beta^2 - k_0^2 \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 - k_0^2 \epsilon_{yy} & -k_0^2 \epsilon_{yz} \\ 0 & -k_0^2 \epsilon_{yz} & -k_0^2 \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = 0$$

Il apparaît une solution (e_x, h_y) qui est une onde TEM (toutes les autres composantes des champs étant nulles), associée à la valeur propre de la constante de propagation $\pm k_0 \sqrt{\epsilon_{xx}}$. Le second vecteur propre est obtenu par couplage des composantes e_y et e_z , dû aux éléments non diagonaux de la matrice de l'équation 1.24. Cette solution (e_y, e_z, h_x) est une onde TM associée à la constante de propagation $\pm k_0 \sqrt{\epsilon_{yy}/(c^2\epsilon_x + s^2\epsilon_z)}$. Pour l'onde TM, qui possède une composante longitudinale du champ électrique non nulle, le vecteur de Poynting n'est pas colinéaire au vecteur d'onde. La direction des "rayons" n'est donc pas perpendiculaire aux plans de phase. Les deux rayons *ordinaire* (onde TEM) et *extraordinaire* (onde TM) n'ont donc pas le même trajet dans le milieu. C'est le phénomène de *double réfraction* illustré sur la figure 1.4.

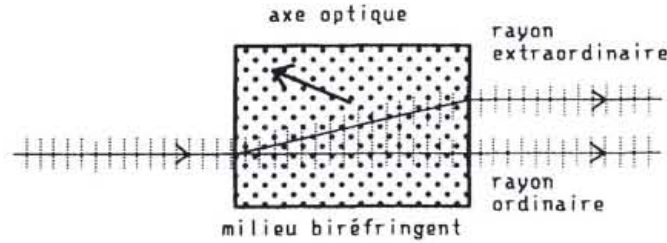


Figure 1.4 : Le phénomène de double réfraction
Le vecteur de Poynting de l'onde extraordinaire n'est pas perpendiculaire aux plans de phase (figurés en pointillés).

Remarquons qu'un milieu avec $\bar{\epsilon}$ scalaire et μ tensoriel donnerait les mêmes propriétés de propagation avec des solutions propres TE et TM.

Le cas des milieux biaxes (triréfringents) se résoud de la même manière. La solution est plus compliquée puisqu'alors les trois composantes du champ électrique sont couplées entre elles par le système (I.24).

I.2.b Milieu gyrotrope

Si les éléments du tenseur de permittivité sont réels, ce tenseur peut toujours être diagonalisé dans des axes réels. Lorsque les éléments du tenseur sont complexes (indépendamment des pertes que nous supposons nulles), ce n'est plus vrai. Le tenseur comportera toujours des termes non diagonaux (imaginaires) dans les axes réels qui diagonalisent la partie réelle de $\bar{\epsilon}$. Les milieux *magnétiques* possèdent de tels tenseurs de permittivité, dont la forme la plus simple (cas isotrope) s'écrit:

$$(I.25) \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_0 \begin{pmatrix} n^2 & i\delta & 0 \\ -i\delta & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}$$

n est l'indice (réel) du milieu. Cette forme du tenseur est imposée par l'hypothèse d'hermiticité. Le système à résoudre est alors, dans le cas d'une propagation selon l'axe Oz :

$$(I.26) \quad \begin{pmatrix} \beta^2 - k_0^2 n^2 & i k_0^2 \delta & 0 \\ -i k_0^2 \delta & \beta^2 - k_0^2 n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0^2 n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = 0$$

Les solutions sont des ondes TEM ($c_z = 0$). Le matériau couple les composantes c_x et c_y par un terme imaginaire. On obtient des ondes planes à *polarisation circulaire droite* ($c_x = ic_y$) et à *polarisation circulaire gauche* ($c_x = -ic_y$) de constantes de propagation $\beta = k_0 \sqrt{n^2 \pm \delta} \sim k_0 n (1 \pm \delta/2n^2)$. Les deux composantes du champ sont égales en module et déphasées de $\pm \pi/2$. On montre facilement qu'une onde polarisée linéairement à l'entrée du milieu en ressort toujours polarisée linéairement, mais que la

direction de polarisation a subi par unité de longueur de propagation une rotation, appelée *rotation Faraday* et égale à $-\mathbf{k}_0\delta/2n$. C'est la *biréfringence circulaire magnétique* ou *effet Faraday*.

Le cas où $\vec{\mathbf{k}}$ n'est pas colinéaire à l'aimantation donne des résultats différents. Dans le cas général (angle θ entre la direction de l'aimantation et la direction de propagation), les modes propres sont deux modes TM ayant pour vecteurs propres du champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = E_0(1, \pm i, -i\delta\sin\theta/n^2)$, avec les vecteurs propres associés (constantes de propagation) $\beta_{\pm} = k_0n\sqrt{1 \pm (\delta c/n)^2}$. Le vecteur champ magnétique est égal à $\vec{\mathbf{H}} = (\beta_{\pm}E_0/\omega\mu)(\mp i, 1, 0)$. La composante suivant Oy du vecteur de Poynting est réelle et vaut $P_{\pm} = \mp\beta_{\pm}\delta\sin\theta/\omega\mu n^2$. Il y a dans ce cas *double réfraction circulaire magnétique*, sauf pour $\theta = \pi/2$.

Si nous effectuons une rotation de π du sens de propagation ($\vec{\mathbf{R}} = (1, -1, -1)$, $\vec{\mathbf{e}}$ étant colinéaire à Oz), $\vec{\mathbf{e}}$ garde la même forme, mais δ est changé en $-\delta$. Cela signifie qu'une onde retraversant le milieu après une réflexion ne ressortira pas identique à ce qu'elle était avant sa première traversée, mais qu'au contraire son décalage angulaire aura doublé. Le milieu est dit *non réciproque*. Cette non-réciprocité est imposée par le caractère non symétrique de ϵ . Cet effet est à la base de nombreux dispositifs non réciproques tels que isolateurs, circulateurs...

Il est remarquable de constater que le *principe du retour inverse*, à première vue, semble ne pas s'appliquer ici. L'énoncé de ce principe n'est pas universellement reconnu. Sous une forme générale, on peut le formuler ainsi : pour tout système linéaire, il existe au moins un rayon (au sens normale locale à une surface de phase) "retour" qui peut suivre un chemin identique au chemin du rayon "aller" (4). Ce *principe du retour inverse* doit être appliqué avec discernement. Par exemple, l'énoncé ci-dessus ne précise pas la quantité d'énergie transmise le long du "chemin inverse".

On peut donner une définition plus restrictive de ce principe en invoquant le "retournement" pur et simple des rayons, en imposant la conservation de l'énergie. Cette définition est d'abord réservée aux seuls milieux réciproques. Les systèmes non-linéaires peuvent être inclus sous certaines conditions (interactions élastiques), mais tous les phénomènes dynamiques du système doivent être inversés (par exemple dans le cas d'un modulateur acousto-optique à ondes progressives modifiant la fréquence du rayon). Le système inversé peut alors être différent du système initial. De plus, l'onde "réfléchie" au niveau du miroir doit être la conjuguée de l'onde incidente (à cause du "renversement du sens du temps"). On peut se contenter de miroirs réels dans le cas scalaire, ou plus généralement dans les cas pour lesquels l'onde possède un état de polarisation linéaire à l'endroit de sa réflexion. Tout autre état de polarisation donne en général des résultats catastrophiques (examiner par exemple le cas d'une onde à polarisation linéaire traversant une lame quart d'onde et subissant une réflexion).

1.2.c Milieu optiquement actif

Certains milieux engendrent des phénomènes de polarisation rotatoire *réciproque*. Ce phénomène ne peut être expliqué par les effets décrits ci-dessus. Il peut en effet se produire dans des liquides (milieux isotropes), et les matériaux concernés ne sont pas magnétiques. Ces substances sont dites *optiquement actives*. Le phénomène est dû à une dissymétrie soit moléculaire (cas des liquides organiques), soit cristalline (absence de plan de symétrie). Il n'y a pas de plan de symétrie et les molécules peuvent exister sous deux formes différentes, images l'une de l'autre par rapport à un plan (5). Ces deux formes sont appelées *dextrogyre* et *lévogyre* selon le sens de la rotation du plan de polarisation observée en regardant la lumière venir vers l'observateur. La modélisation de l'effet d'activité optique implique

de renoncer à une des hypothèses que nous avons formulées, à savoir la localité sous-jacente aux relations constitutives (1.7) et (1.8), qui est (de même que l'hypothèse de linéarité) une condition très restrictive et une simplification inapplicable dans le cas de l'activité optique. Il n'y a en effet a priori aucune raison pour que la réponse d'un matériau en un point ne dépende que de la valeur du champ exciteur en ce point. On montre qu'une prise en compte simple de l'environnement immédiat du point matériel étudié revient à modifier les relations constitutives. (1.7) devient :

$$(1.27) \quad \vec{D} = \vec{\epsilon}\vec{E} + g \text{ Rot}\vec{E}$$

Cette relation de Drude-Zener peut être obtenue en développant le champ \vec{E} en série de Taylor au voisinage du point étudié et en prenant une fonction concentrée autour du point pour ϵ au lieu d'une distribution de Dirac, un Dirac traduisant l'hypothèse de localité (2).

L'équation de dispersion s'écrit :

$$(1.28) \quad \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} - \omega^2 \mu g \nabla \wedge \vec{E} = k_0^2 \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

d'où le système à résoudre dans le cas isotrope :

$$(1.29) \quad \begin{pmatrix} \beta^2 - k_0^2 n^2 & i \beta \omega^2 \mu g & 0 \\ -i \beta \omega^2 \mu g & \beta^2 - k_0^2 n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0^2 n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = 0$$

Le système (1.29) est le même que (1.26), avec $k_0^2 \delta$ est remplacé par $-\beta \omega^2 \mu g$. Les solutions sont donc des ondes à polarisation circulaire droite et gauche induisant une rotation du plan de polarisation égale à $k_0^2 g / 2\epsilon_0$ au premier ordre en $k_0^2 g$. En revanche, le retournement du sens de propagation ne modifie pas la relation (1.27), ce qui conduit au même système à résoudre, et donc à une rotation *réiproque* du plan de polarisation.

1.3 Le faisceau gaussien

Soit une répartition spatiale gaussienne de champ en $z=0$ (le problème est traité ici à deux dimensions) :

$$(1.30) \quad \Psi(x,0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right)$$

où $2w$ est la dimension du faisceau à e^{-2} en intensité. La valeur de A est donnée par le choix de la normalisation. On prend souvent une relation telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \Psi^* dx = 1$, ce qui entraîne $A A^* = (\sqrt{2/\pi})/w$.

Le problème est de trouver la distribution du champ en z . Une solution consiste à décomposer le faisceau en ondes planes, à faire propager ces ondes planes jusqu'à l'abscisse z , puis à calculer la figure d'interférences obtenue. La première étape passe par le calcul de la décomposition en ondes planes, donc par le calcul de la transformée de Fourier du champ. On obtient (la transformée de Fourier d'une gaussienne étant une gaussienne) :

$$(I.31) \quad \Psi(x,z) = A \frac{w}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [- (k_x w/2)^2 - i (k_x x + k_z |z|)] dk_x$$

avec $k_x^2 + k_z^2 = k^2$.

La relation (I.31) est difficilement exploitable directement. L'approximation paraxiale simplifie l'expression et permet de continuer les calculs sous forme analytique. Elle consiste à utiliser l'hypothèse de divergence faible en écrivant $k_z = k [1 - 0.5(k_x/k)^2]$. Après calculs, on obtient :

$$(I.32) \quad \Psi(x,z) = A \frac{w}{|\bar{w}|} \exp [- (\frac{x}{\bar{w}})^2 - i k |z|]$$

avec

$$(I.33) \quad \bar{w}^2 = w^2 (1 - \frac{2i|z|}{k w^2})$$

La partie réelle de \bar{w}^2 donne la variation de l'amplitude en fonction de z , la variation de $w/|\bar{w}|$ étant négligeable devant celle de l'exponentielle. La largeur à $1/e$ en amplitude du faisceau à l'abscisse z est donnée par

$$(I.34) \quad x_0 = w \sqrt{1 + \frac{2z}{k w^2}} \simeq \frac{z \lambda}{\pi w}$$

l'approximation de droite étant valable pour $z \gg w/\lambda$. L'équation (I.34) est celle d'une hyperbole dont les asymptotes font un angle $\theta = \text{Arctg}(\lambda/\pi w)$ avec l'axe du faisceau, angle qui représente la *divergence* du faisceau gaussien (l'angle de divergence est le double de l'angle θ). La distance nécessaire pour doubler la dimension du faisceau par rapport à sa valeur au point de pincement est égale à $\pi w^2/\lambda$. Elle représente grossièrement la limite de validité de l'optique géométrique. Les hyperboles décrites par (I.34) correspondent localement aux directions de propagation de l'énergie.

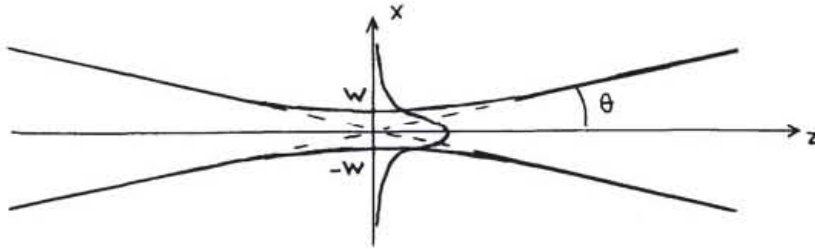


Figure I.5 : Faisceau gaussien et son évolution (points à $1/e$)
Les asymptotes représentent les demi-angles de divergence (approximation de l'optique géométrique).

Les solutions (I.32) et (I.33) sont les mêmes que celles obtenues en résolvant analytiquement les équations de Maxwell lorsque l'on néglige le terme en dérivée seconde par rapport à z (ce qui revient à traduire l'hypothèse de l'approximation paraxiale). En cherchant une solution sous la forme $E = \Psi(x,y,z) \exp(-ikz)$ pour l'équation (1.22) ((1.22) se réduit à $\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = 0$ dans le cas d'un espace isotrope), on obtient :

$$(1.35) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$$

Si l'on néglige le dernier membre du terme de droite, c'est-à-dire si l'on fait l'hypothèse de variation lente de Ψ en fonction de z (variation lente par rapport à la longueur d'onde) $k\Psi' \gg \Psi'' \ll k^2\Psi$, où $\Psi' = \partial\Psi/\partial z$. on obtient la solution analytique donnée par (1.32) et (1.33). La généralisation au faisceau gaussien de révolution à deux dimensions est immédiate.

1.4 Etude d'une discontinuité diélectrique plane

1.4.a Réfraction d'une onde plane TE sur une discontinuité plane

Soit à étudier la réflexion et la réfraction d'une onde plane se propageant dans un milieu de permittivité $\epsilon = \epsilon_1' + i\epsilon_1'' = (n_1' + i n_1'')^2$ et rencontrant un plan de discontinuité sur un milieu de permittivité $\epsilon = \epsilon_2' + i\epsilon_2'' = (n_2' + i n_2'')^2$. Les variables utilisées sont définies sur la figure 1.6.

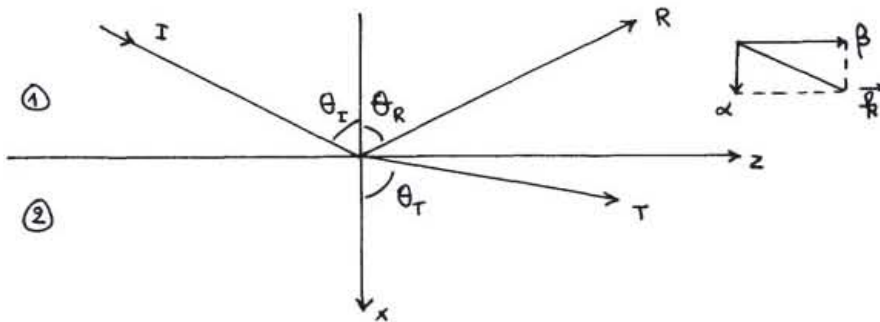


Figure 1.6 : Le problème de la réflexion sur une interface plane. Les paramètres utilisés dans le texte sont définis sur la figure.

On prend des ondes planes sous la forme $E(x,y) = E_0 \exp(\mp i\alpha x) \exp(-i\beta z)$. On indexe les quantités à l'aide des indices I, R et T suivant qu'il s'agit de l'onde incidente, réfléchie ou réfractée (transmise). Pour une onde TE (polarisée parallèlement au plan de la discontinuité, i.e. Oy), on résout le système en écrivant la continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{H} ($E_x = E_T$, $H_x = H_T = (i/\omega\mu) (\partial E_y/\partial x)$) en $x=0$ et $z=0$, et en écrivant l'invariance en z des coefficients de réflexion et de transmission R et T. En ajoutant les relations entre les α et les β , on obtient un système de sept équations linéaires à huit inconnues complexes $\alpha_1, \alpha_R, \alpha_T, \beta_1, \beta_R, \beta_T, R$ et T. Il y a un paramètre complexe à fixer, par exemple β_1 . On introduit utilement les quantités complexes θ_1, θ_R et θ_T , que l'on relie aux β par l'équation $\beta = k_0 n \sin\theta$, dont l'interprétation physique est évidente dans le cas passif sans perte.

L'invariance en z des équations conduit à l'égalité des constantes de propagation "longitudinales" β , ce qui entraîne $\alpha_1 = \alpha_R = k_0 n_1 \cos\theta_1$ et $\alpha_T = k_0 n_2 \cos\theta_T$. Les coefficients de réflexion et de transmission se calculent alors simplement :

$$(1.36) \quad R = \frac{\alpha_1 - \alpha_T}{\alpha_1 + \alpha_T}$$

$$(1.37) \quad T = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Les "angles" de diffraction sont donnés par :

$$(1.38) \quad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

qui se résume à la loi de *Snell-Descartes* dans le cas de permittivités réelles.

On remarque que l'on obtient dans le cas général des angles de réfraction complexes. Le champ transmis se présente sous la forme :

$$(1.39) \quad E_T(x,z) = T E_0 \exp[(\alpha_2 x + \beta_2 z) - i(\alpha_1 x + \beta_1 z)]$$

où les quantités complexes ont été développées sous la forme $X = X' + iX''$. Les *plans à amplitude constante* ont pour équation $\alpha_2 x + \beta_2 z = 0$. Les *plans à phase constante* ont pour équation $\alpha_1 x + \beta_1 z = 0$. Si les milieux sont isotropes, la direction de propagation dans le milieu 2 est déterminée par la normale aux plans à phase constante : l'angle réel de réfraction ψ est donné par l'équation $x \cos\psi + z \sin\psi = 0$, où $\cos\psi = \alpha_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$ et $\sin\psi = \beta_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$. La notion de "réflexion totale" devient alors difficile à définir lorsque des milieux amplificateurs interviennent. Il convient de vérifier si le problème mathématique correspond à un problème physique (un milieu amplificateur semi-infini correspond à une quantité infinie d'énergie stockée...). Une manière plus saine d'aborder le problème consiste alors à examiner le cas pratique des guides plans amplificateurs (cf. guidage par le gain).

Dans les situations que l'on peut approcher par l'hypothèse de milieux sans gain ni perte (soit la plupart des cas classiques excluant les milieux métalliques et les raies ou bandes d'absorption intenses des milieux diélectriques), l'angle critique de réflexion totale est donné par $\sin\theta_c = n_2/n_1$. θ_c est l'angle d'incidence au-delà duquel il n'y a plus d'onde transmise dans le milieu 2 : toute l'énergie est réfléchie dans le milieu 1. Ce cas correspond à α_2 imaginaire pur : l'équation (1.36) donne bien alors $|R| = 1$. Ce résultat n'est valable qu'à l'ordre d'approximation où nous nous sommes placés (ni gain ni perte), la prise en compte de l'absorption et/ou de l'amplification entraînant quelques modifications (cf. fin de ce paragraphe).

Le résultat le plus important concernant la réflexion totale est l'existence d'une *onde évanescente* (i.e. exponentiellement décroissante) dans le milieu 2. Le champ transmis pour $\theta_1 > \theta_c$ s'écrit en effet $T E_0 \exp(-\gamma_2 x - i\beta_2 z)$, avec $\gamma_2 = i\alpha_2$. La décroissance en x est exponentielle, et il n'y a pas de champ propagé dans la direction perpendiculaire à l'interface dans le milieu 2. Le champ s'étend sur une épaisseur $1/\gamma_2$ (épaisseur pour laquelle l'amplitude du champ a déca de $1/e$). Dans la plupart des cas, l'ordre de grandeur de cette épaisseur est la longueur d'onde λ . Ce phénomène capital est à la base de très nombreux dispositifs d'optique guidée. L'onde réfléchie subit d'autre part à la réflexion totale un déphasage Φ égal à $2 \operatorname{Arctg}(\gamma_2/\alpha_1)$, dû à la valeur du coefficient de réflexion $R = \exp(i\Phi)$, et correspondant à un retard de phase d'après les conventions utilisées. Ce retard de phase peut être interprété comme étant dû à la pénétration de l'onde incidente dans le milieu 2 (sous la forme d'onde évanescente).

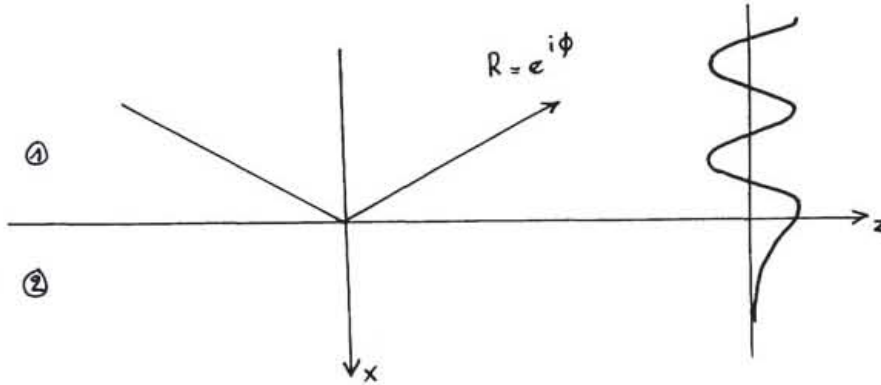


Figure 1.7 : Réfraction d'une onde plane : cas de la réflexion totale. Il existe dans le milieu 2 une onde évanescente.

Il est important de noter qu'il existe dans le cas général un flux d'énergie à travers la surface de discontinuité, que la réflexion soit "totale" ou non. Ce flux est déterminé par la valeur de la composante selon x du vecteur de Poynting (cf. équation 1.19) et vaut :

$$(1.40) \quad P_x = \frac{1}{2\omega\mu_0} |E_y|^2 \operatorname{Re}(\alpha_T^*)$$

Ce flux de puissance a une interprétation physique simple : la présence d'énergie dans le milieu 2, que ce soit sous la forme d'une onde transmise ou d'une onde évanescente, impose, par l'intermédiaire des relations de continuité, un transfert d'énergie du milieu présentant le plus de gain (ou le moins de pertes) vers l'autre milieu. Cet effet est à l'origine de certains dispositifs optoélectroniques (par exemple amplification ou absorption par onde évanescente).

Notons que la condition de continuité E_y s'écrit $1 + R = T$ et que celle de H_x s'écrit $\alpha_1 - \alpha_R R = \alpha_T T$. En utilisant le résultat $\alpha_R = \alpha_1$ et en multipliant terme à terme ces deux relations, on obtient $\alpha_1 = \alpha_1 R^2 + \alpha_T T^2$, équation traduisant la conservation de l'énergie.

1.4.b Le cas TM

Avec les mêmes notations que pour le cas TE, on raisonne avec le champ magnétique $H(x,y) = H_0 \exp(\mp i\alpha x) \exp(-i\beta z)$. Il faut écrire la condition de continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{H} ($H_x = H_y$, $E_x = E_z = -(i/\omega\epsilon) (\partial H_y / \partial x)$). Les coefficients de réflexion et de transmission se calculent comme pour le cas TE. On obtient pour le champ H_y :

$$(1.41) \quad R = \frac{\alpha_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \alpha_T}{\alpha_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \alpha_T}$$

$$(1.42) \quad T = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \alpha_T}$$

La conservation de l'énergie se traduit dans le cas TM par la relation $\alpha_i = \alpha_1 R^2 + (\epsilon_1/\epsilon_2)\alpha_T T^2$.

Il est important de remarquer que R peut s'annuler dans le cas TM, pour $\epsilon_2 \alpha_i = \epsilon_1 \alpha_T$. Cela correspond à un angle d'incidence appelé *angle de Brewster* θ_B tel que $\cos \theta_B = \sqrt{\epsilon_r/(\epsilon_r + 1)}$, avec $\epsilon_r = \epsilon_1/\epsilon_2$ est la permittivité relative du milieu 1 par rapport au milieu 2. Il est aisé de montrer que l'on a alors $\sin \theta_R = -\cos \theta_T$, ce qui correspond à des directions orthogonales pour les rayonnements réfractés et réfléchis. L'origine du champ réfléchi étant le rayonnement des dipôles du milieu 2, ce rayonnement est nul dans la direction de l'axe du dipôle. Le cas d'une onde TM en incidence de Brewster correspond précisément à cette configuration.

Le problème de la réflexion peut être abordé par l'aspect *impédance d'onde* : le coefficient de réflexion de la composante du champ électrique parallèle à la surface de discontinuité s'écrit :

$$(1.43) \quad R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

où Z_i est l'impédance d'onde qui vaut $\omega\mu/\alpha_i$ pour une onde TE (coefficient de réflexion de E_z) et $\alpha_i/\omega\epsilon_i$ pour une onde TM (coefficient de réflexion de E_z).

Dans le cas de la réflexion totale, le déphasage Φ est égal à $2 \text{Arctg}(\epsilon_1 \gamma_2 / \epsilon_2 \alpha_1)$.

1.4.c Réflexion d'un faisceau : effet Goos-Hänchen

Considérons un faisceau gaussien arrivant sous une incidence θ sur une surface de séparation plane, l'angle d'incidence correspondant à une réflexion totale. Le "waist" du faisceau est situé au voisinage de l'interface, et la divergence est supposée faible. Le champ est supposé TE (champ électrique parallèle à l'interface). Le problème consiste à déterminer le champ réfléchi. Comme d'habitude, nous décomposons le champ en ondes planes (cf. 1.3). Chaque onde plane se réfléchit suivant ses caractéristiques propres (cf. 1.4.a). Le champ réfléchi est donné par la figure d'interférences des ondes planes réfléchies.

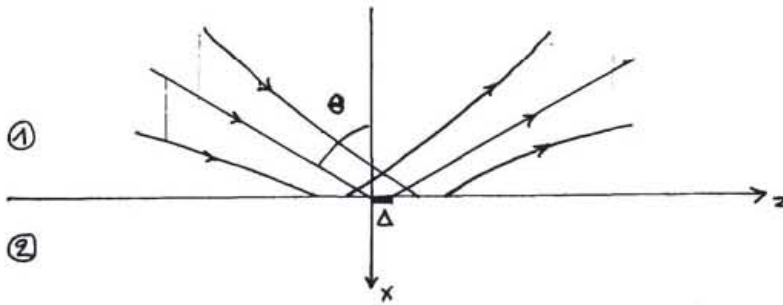


Figure 1.8 : Réflexion d'un faisceau gaussien sur une interface plane.

Le champ réfléchi est donné par :

$$(1.44) \quad E_R(x,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\beta) f(\beta) \exp(i\alpha x - i\beta z) d\beta$$

où $R(\beta)$ est le coefficient de réflexion de l'onde plane de constante de propagation β parallèlement à l'interface, et $f(\beta)$ est la composante de Fourier en β de l'onde incidente E_i .

Dans l'hypothèse $kw \ll 1$ (approximation paraxiale), et si θ n'est pas trop proche de l'angle critique, on peut développer $R(\beta)$ en $R(\beta_1) + (\beta - \beta_1)(dR/d\beta)$, où $\beta_1 = k \sin \theta$ est la constante de propagation de l'axe du faisceau selon z . En introduisant cette expression dans (1.44), on obtient :

$$(1.45) \quad E_R(x,z) = \frac{1}{2\pi} R(\beta_1) \exp(-i\beta_1 \Delta) \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) \exp[i\alpha x - i\beta(z - \Delta)] d\beta$$

avec

$$(1.46) \quad \Delta = -i \frac{1}{R(\beta_1)} \left[\frac{dR}{d\beta}(\beta_1) \right] = \frac{d\Phi}{d\beta}(\beta_1)$$

$$(1.47) \quad \Phi = 2 \operatorname{Arctg} \left(m \frac{\gamma_2}{\alpha_1} \right)$$

$\gamma_2 = i\alpha_2$ est le coefficient de décroissance de l'onde évanescente dans le milieu 2. Φ est le déphasage dû à la réflexion totale donné par (1.36) ou (1.41) et m vaut 1 dans le cas TE et $\epsilon_r = \epsilon_1/\epsilon_2$ dans le cas TM (dans ce dernier cas, les calculs précédents sont menés avec le champ magnétique).

La différence par rapport à l'optique géométrique (approximation du faisceau peu divergent par un rayon) est un déplacement longitudinal Δ et un déphasage $\beta_1 \Delta$. Cet effet *Goos-Hänchen* est directement relié à l'existence d'une onde évanescente dans le milieu 2 (cf. 1.4.a et figure 1.7). Le déplacement Δ , calculé à partir de (1.46), s'exprime simplement sous la forme :

$$(1.48) \quad \Delta = \frac{2\beta_1}{\gamma_2 \alpha_1} \frac{m(\alpha_1^2 + \gamma_2^2)}{\alpha_1^2 + m^2 \gamma_2^2}$$

soit :

$$(1.49) \quad \Delta_{TE} = \frac{2\beta_1}{\gamma_2 \alpha_1} = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{k_0 n_2 \sqrt{\epsilon_r \sin^2 \theta - 1}} \quad \text{pour le cas TE}$$

$$(1.50) \quad \Delta_{TM} = \frac{\Delta_{TE}}{(\epsilon_r + 1) \sin^2 \theta - 1} \quad \text{pour le cas TM}$$

Le phénomène peut être décrit par une *profondeur de pénétration* égale à $1/\gamma_2$: tout se passe comme si le "rayon" se réfléchissait sur une surface (métallique) fictive située à une distance $1/\gamma_2$ de l'interface (cf. figure 1.9).

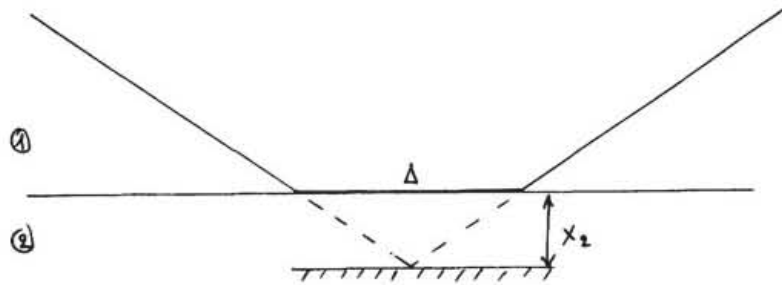


Figure I.9 : Déplacement Goos-Hänchen lors d'une réflexion totale.
L'interprétation en optique géométrique implique une pénétration de l'onde dans le milieu 2 sur une distance x_2 .

Le calcul peut être fait dans le cas d'une *polarisation circulaire*. On montre alors que le décalage longitudinal s'accompagne d'un *décalage transverse* dont le sens dépend de la nature droite ou gauche de la polarisation circulaire. Ces déplacements ont parfois été interprétés, par analogie mécanique, en termes d'*effets inertiels du spin du photon*, la polarisation pouvant être considérée comme l'équivalent du spin de la mécanique quantique.

Notons que la nature gaussienne du faisceau n'intervient pas dans les développements qui précèdent (équations I.44 à I.50). La seule hypothèse est que le faisceau doit être peu divergent et que l'angle d'incidence ne doit pas être trop proche de l'angle critique de réflexion totale (pas trop proche signifie ici que leur différence doit être au moins supérieure à la divergence du faisceau ; dans le cas contraire, certaines composantes spectrales ne seraient pas réfléchies totalement, et la nature du faisceau serait altérée). Les résultats ci-dessus sont bien sûr *valables pour une onde plane*.

I.4.d Introduction au guidage plan

A partir des résultats des paragraphes précédents, il est aisé d'obtenir une description simple de la propagation dans un guide plan isotrope à l'aide d'un modèle de propagation par ondes planes. Le principe est décrit dans la figure I.10. Il suffit de reprendre la figure I.9 et d'introduire une seconde interface parallèle à la première de manière à "piéger" les ondes planes dans le milieu 1. La condition de résonance transverse, analogue à la condition obtenue pour un résonateur Fabry-Pérot, s'écrit simplement, en tenant compte des déphasages aux interfaces donnés par (I.47) :

$$(I.51) \quad 2k_0 n_1 d \cos \theta - \Phi_{12} - \Phi_{13} = 2p\pi$$

où p est un entier positif ou nul et $k_0 n_1 \cos \theta$ est la constante de propagation transverse α .

L'équation (I.54) est appelée *équation de dispersion* et sa résolution aboutit à une *quantification* des angles de propagation (i.e. des constantes de propagation) autorisés par la condition de résonance, donnant les *valeurs propres* associées aux *vecteurs propres* que constituent les champs

des modes de propagation. Ces champs peuvent être calculés simplement en calculant la figure d'interférence des deux ondes planes intervenant dans la composition du mode considéré. En écrivant l'auto-consistance du champ à l'intérieur du guide ($R_{12}R_{21}\exp(-2i\alpha d) = 1$), on retrouve (1.51). Les interférences des deux ondes planes à l'intérieur du guide donne une fonction circulaire. On trouve des exponentielles décroissantes à l'extérieur (correspondant aux ondes évanescentes des paragraphes précédents). Les amplitudes sont calculées en écrivant la continuité des composantes tangentielles des champs.

Il est également utile d'introduire un paramètre important : l'épaisseur effective du guide $d_{\text{eff}} = d + x_2 + x_3$, qui représente l'épaisseur sur laquelle l'énergie se trouve confinée (image à manier avec précaution, la réalité mathématique étant une décroissance exponentielle en-dehors du milieu 1).

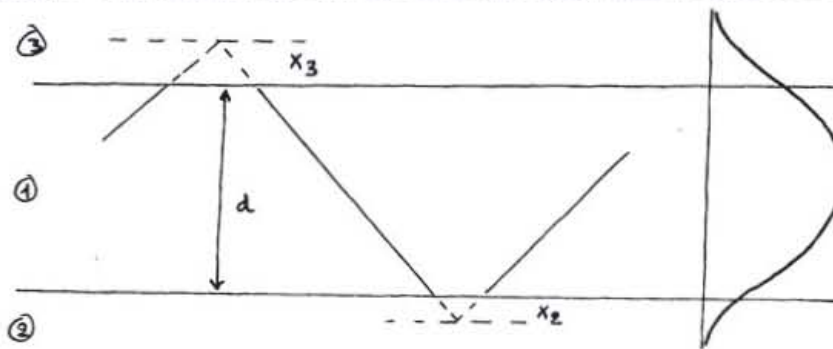


Figure 1.10 : Guidage plan.

Les modes de propagation sont analysés à l'intérieur du guide comme une combinaison d'ondes planes.

1.5 Couplage de modes

1.5.a Le phénomène physique

Le phénomène de couplage de modes est très général et peut être observé pour tout système susceptible d'être décrit sous la forme d'ondes, que ce système soit mécanique (couplage entre pendules par exemple), électrique (couplage par inductance mutuelle entre deux circuits oscillants), électromagnétique (couplage entre modes de propagation dans un guide microonde ou optique). Tout système relevant d'une description sous la forme d'ondes et soumis à des conditions aux limites finies est en effet *quantifié*, ce qui signifie qu'il possède un nombre (en général fini) de modes propres d'oscillation qui sont les vecteurs propres de l'opérateur gouvernant le système. Les valeurs propres qui leur sont associées sont en général distinctes. Il arrive cependant que deux (ou plusieurs) modes propres possèdent des valeurs propres très voisines (par rapport à l'inverse d'un temps ou d'une dimension caractéristique du système), voire égales. Il y a alors possibilité de *couplage* entre ces modes. L'expérience commune montre que les systèmes paraissent *échanger* partiellement ou totalement leur énergie (expérience des pendules couplés).

Nous supposons dans un premier temps que le couplage implique seulement deux modes et qu'il s'opère *sans perte*. On peut montrer que les résultats qui sont établis dans les paragraphes

suyvants restent valables à condition qu'il n'y ait *pas de pertes différentielles* entre les modes (i.e. si les modes concernés ont les mêmes pertes).

1.5.b La théorie phénoménologique du couplage

Nous supposons que les modes propres (non couplés) sont décrits par la relation :

$$(1.52) \quad X_j(z) = X_j^0 \exp(-i\beta_{0j}z)$$

où X_j est une grandeur quelconque dont on étudie l'évolution. La dépendance en $\exp(i\omega t)$ est sous-entendue. La constante de propagation β_{0j} est réelle dans le cas sans perte. Le flux d'énergie total est égal à $P = \sum s_j |X_j|^2$ où s_j vaut $+1$ ou -1 selon le sens de propagation de l'onde X_j . On supposera que l'expression du flux total d'énergie n'est pas modifiée par le couplage (6).

Nous allons modifier les équations d'évolution des modes pour tenir compte du couplage, en supposant que le système reste linéaire. Dans le cas le plus général, on obtient :

$$(1.53) \quad \frac{dX_j}{dz} = -i\beta_{0j}X_j + \sum_k \alpha_{jk}X_k$$

Les coefficients α_{jk} sont ici des paramètres phénoménologiques qui seront déduits de l'expérience. Ils peuvent être par ailleurs calculés dans le cadre d'une théorie appropriée. Dans le cas de l'approximation à deux modes, le système (1.53) se ramène à deux équations couplées. Le cas du couplage à n modes est traité de la même manière, le système à résoudre étant de dimension n . En écrivant que le couplage est sans perte, on en déduit les relations :

$$(1.54) \quad \frac{dP}{dz} = 0 \Rightarrow \alpha_{jj} \text{ imaginaire et } \alpha_{21} = -s\alpha_{12}^*$$

où $s = s_1s_2$ vaut $+1$ dans le cas codirectionnel et -1 dans le cas contradirectionnel. Les coefficients α_{jj} ne contribuent pas directement au couplage. Dans le cas où ils ne sont pas nuls, ils vont modifier les constantes de propagation des modes. Le système s'écrit donc :

$$(1.55) \quad \begin{aligned} \frac{dX_1}{dz} &= -i\beta_1X_1 + \alpha X_2 \\ \frac{dX_2}{dz} &= -i\beta_2X_2 - s\alpha^*X_1 \end{aligned}$$

Le couplage se traduit par un échange d'énergie. Nous introduisons une *amplitude modale* $C_j(z)$ dépendant de z afin de simplifier les équations d'évolution (1.55) : $X_j = C_j(z) \exp(-i\beta_jz)$:

$$(1.56) \quad \begin{aligned} \frac{dC_1}{dz} &= \alpha C_2 \exp(-i\Delta\beta z) \\ \frac{dC_2}{dz} &= -s\alpha^* C_1 \exp(+i\Delta\beta z) \end{aligned}$$

où $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ est le *désaccord de phase* entre les deux modes 1 et 2 (différence des constantes de propagation).

I.5.c Cas du couplage codirectionnel uniforme

Pour pousser plus loin les calculs, il faut faire des hypothèses supplémentaires. Nous supposons dans ce paragraphe que le processus du couplage ne dépend pas de z et que les ondes sont codirectionnelles dans le sens des z positifs ($s_1 = s_2 = +1$). Nous imposons également des conditions initiales sur les amplitudes modales. Un des cas les plus intéressants consiste à exciter un seul mode à l'entrée du dispositif de couplage ($C_2(0) = 0$). La résolution de (1.56) conduit à la solution :

$$\begin{aligned}
 C_1(z) &= C_1(0) \exp\left(-i \frac{\Delta\beta}{2} z\right) \left[\cos(cz) + i \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \sin(cz)\right] \\
 (1.57) \quad C_2(z) &= -\frac{\alpha^*}{|\alpha|} \frac{C_1(0)}{\sqrt{1+\eta^2}} \exp\left(+i \frac{\Delta\beta}{2} z\right) \sin(cz) \\
 \eta &= \frac{\Delta\beta}{2|\alpha|} \quad \text{et} \quad c = |\alpha| \sqrt{1+\eta^2}
 \end{aligned}$$

η est un paramètre sans dimension caractérisant le couplage (*paramètre normalisé de désaccord de phase*). On en déduit l'évolution de la puissance dans chacun des modes :

$$\begin{aligned}
 (1.58) \quad \frac{P_1(z)}{P_1(0)} &= 1 - \frac{\sin^2(cz)}{1+\eta^2} \\
 \frac{P_2(z)}{P_1(0)} &= \frac{\sin^2(cz)}{1+\eta^2}
 \end{aligned}$$

Les puissances dans les modes sont des fonctions périodiques de la distance de propagation. Pour $\eta = 0$ (il y a alors accord de phase, $\beta_1 = \beta_2$), on a transfert total d'énergie du mode 1 vers le mode 2. La distance L du premier maximum de conversion (soit la demi-période du phénomène pour la puissance, ou le quart de la période pour les champs), est égale à :

$$(1.59) \quad L = \frac{\pi}{2|\alpha|\sqrt{1+\eta^2}} \quad \text{soit} \quad \frac{L}{\lambda_0} = \frac{k_0}{4|\alpha|\sqrt{1+\eta^2}}$$

où α_0 et k_0 sont respectivement la longueur d'onde et le nombre d'onde dans le vide du rayonnement associé à l'onde considérée.

Les représentations graphiques des puissances dans les modes ont diverses allures suivant la valeur relative de η par rapport à 1. Sur les figures I.11 a, b et c sont représentés les cas $\eta = 0, 1$ et 3. Le transfert d'énergie est d'autant plus efficace que η est petit.

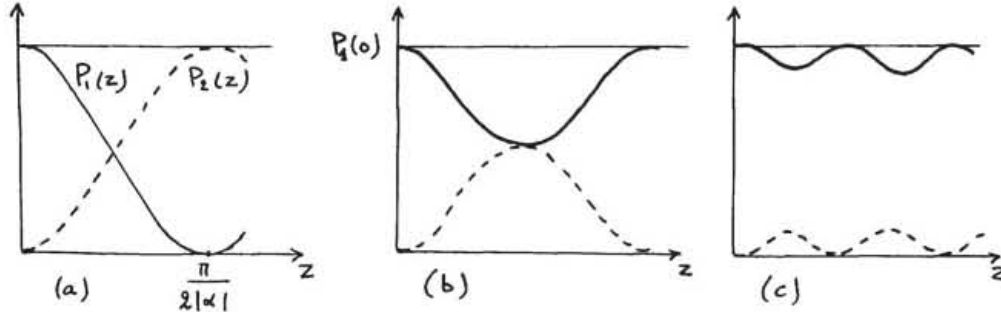


Figure 1.11 : Couplage de mode codirectionnel
 Cas $\eta=0$ (a), $\eta=1$ (b) et $\eta=3$ (c). Un couplage efficace implique une valeur de η inférieure à 1.

Dans le cas du couplage à n modes, il est possible de simplifier le système en ne retenant que les modes couplés significativement. Le critère est dans ce cas la valeur du paramètre η_n .

1.5.d Résolution directe : les modes hybrides

Tout système possède des modes propres de propagation. Il est intéressant de résoudre directement le système (1.55) en cherchant les modes propres du système couplé sous la forme $X(z) = X_0 \exp(-i\beta z)$. Le système à résoudre est alors :

$$(1.60) \quad \begin{pmatrix} \beta - \beta_1 & -i\alpha \\ i\alpha^* & \beta - \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont :

$$(1.61) \quad \begin{aligned} \beta_{\pm} &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \pm c \\ X_{20} &= \left(\frac{\Delta\beta \pm 2c}{2i\alpha} \right) X_{10} \end{aligned}$$

Le couplage de modes résulte donc d'un phénomène d'interférences entre modes propres d'un système lorsque celui-ci est excité simultanément sur plusieurs modes propres. Le couplage permet une levée de dégénérescence de modes dégénérés ou quasi-dégénérés.

Afin d'illustrer ce résultat, nous allons examiner le cas particulier (fréquent dans la pratique) d'un système symétrique en z (invariant par changement de z en $-z$). On montre alors que α est imaginaire pur ($\alpha = \pm i|\alpha|$). A l'accord de phase ($\eta=0$), on a $\beta_{\pm} = \beta \pm |\alpha|$ et $X_{20} = \mp s_{\alpha} X_{10}$, où s_{α} est égal au signe de la partie imaginaire de α . La situation est illustrée sur la figure 1.12 dans le cas de deux guides plans monomodes identiques ($\Delta\beta=0$ pour toute longueur d'onde) voisins. Le couplage résulte de la proximité des guides, les ondes évanescentes des modes de propagation de chaque guide se recouvrant partiellement dans la région comprise entre les guides. Les champs des guides individuels

sont représentés, de même que les modes de la structure complète. L'excitation du mode de l'un des guides (guide 1 par exemple, excité dans le mode TE) conduit à exciter à peu près également les deux modes propres de la structure complète, qui vont se propager avec des constantes de propagation différentes. Lorsque la différence de phase atteint π , la figure d'interférence est telle que l'énergie est maintenant localisée au niveau du guide 2. Si l'on supprime la structure de couplage, l'énergie reste dans le guide 2.

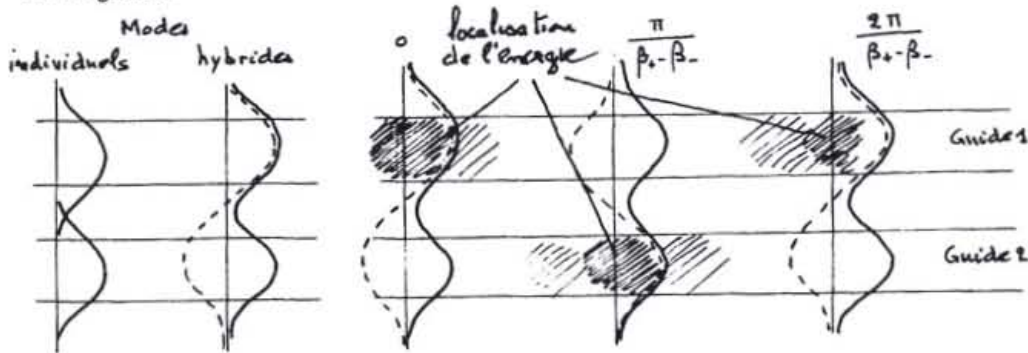


Figure 1.12 : Le couplage de modes en tant qu'interférences
L'excitation du système se fait sur plusieurs modes propres dont la figure d'interférences en une abscisse donnée détermine la répartition de l'énergie dans la section droite du système.

Si l'on sait commander (électriquement par exemple), soit le désaccord de phase $\Delta\beta$, soit la force du couplage α , on peut réaliser un dispositif de modulation ou de commutation de lumière.

I.5.e Couplage périodique, couplage contradirectionnel

Le système (1.56) montre qu'il ne peut y avoir transfert total que si $\Delta\beta = 0$ lorsque α est constant. Une méthode simple pour obtenir un accord de phase artificiel consiste à *moduler spatialement le couplage* avec une composante spectrale à $\Delta\beta$. La modulation étant nécessairement réelle, une variation de α comprenant une composante en $\cos(\beta z)$ permet de "rattraper" le désaccord de phase. Cet artifice est connu depuis longtemps (diffraction sur un réseau) et est appliqué à l'optique guidée dans certains dispositifs opto-électroniques. C'est le cas par exemple du *couplage contradirectionnel* pour lequel un réseau de pas $\pi/\Delta\beta$ couple deux ondes ayant des constantes de propagation de même valeur absolue, mais de signes opposés. Dans ce cas, l'évolution de la puissance dans chacun des modes est décrite par des fonctions hyperboliques au lieu des fonctions circulaires du cas codirectionnel. Les "miroirs" des lasers de type DFB (Distributed FeedBack) sont réalisés selon ce principe.

REFERENCES

Chapitre I

1. voir par exemple L'Onde Electrique, 69, mai-juin 1989, pp. 83-84
2. Vassallo, C. : "Electromagnétisme classique dans la matière", Dunod, 1980
3. Vassallo, C. : "Pseudo-modes et guides optiques", Annales des Télécom., 43, 1988, pp. 48-65
4. Chavel, P. : "communication privée"
5. Bruhat, G. : "Optique", Masson, 1965
6. Vassallo, C. : "Théorie des guides d'ondes électromagnétiques", tome 1, Eyrolles, 1985